Vademecum sur l'étude des fonctions (terminale)

Méthode

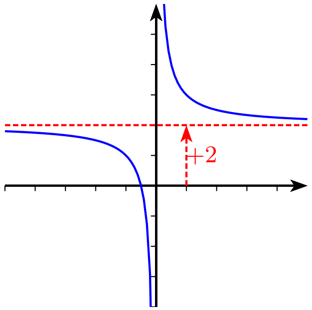
Lorsque l'on étudie une fonction, on répond aux questions (dans l'ordre) :

1. **Domaine de définition** de la fonction, éventuellement domaine de continuité, dérivabilité...
2. **Réduction du domaine d'étude**
3. **Variations :**
   On étudie les variations de la fonction, on repère les éventuelles tangentes horizontales.
   On calcule les valeurs de f aux points remarquables.
4. **Limites et asymptotes** aux bords du domaine de définition.
5. **Tracer le graphe :** lorsque c'est possible, on trace le graphe de la fonction. N'oubliez pas les asymptotes, points et tangentes remarquables...

A Translation des graphes

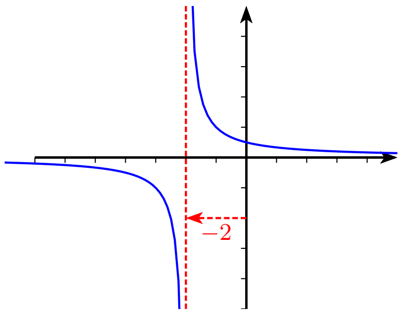
Translation verticale

Exemple :
La courbe de $x \mapsto \dfrac{1}{x} + 2$ est la courbe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ translatée de $+2$ vers le haut.



Translation horizontale

Exemple :
La courbe de $x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$ est la courbe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ translatée de -2 horizontalement.

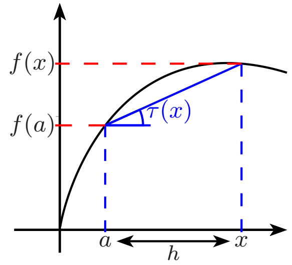


B Continuité

f est continue en a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$

Théorème des valeurs intermédiaires
Si f est continue sur un intervalle I contenant $[a, b]$.
Alors f prend toutes les valeurs situées entre $f(a)$ et $f(b)$.
Autre formulation : L'image d'un intervalle par une application continue (à valeurs réelles) est un intervalle.

C Dérivabilité



Le **taux d'accroissement** de f en a est défini par

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

il désigne la pente entre les points $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$.

- f est dérivable en a si $\tau_a(x)$ a une limite finie quand $x \to a$,

  $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

  (on a posé $h = x - a$)

  Dans ce cas, la courbe admet une **tangente** au point a dont la pente est $f'(a)$:

  $$T_a \ : \ y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

  – si $f'(a) = 0$: tangente horizontale.
  – si $f'(a) > 0$: tangente de pente positive (fonction croissante).
  – si $f'(a) < 0$: tangente de pente négative (fonction décroissante).

- Si le taux d'accroissement admet une limite infinie, alors f n'est pas dérivable en a et la courbe admet une tangente verticale en a.

  (dirigée vers le haut ou vers le bas suivant le signe de la dérivée)