Cours 10-11-26 après-midi

Résoudre $y' - 3y = e^x$ sur $\mathbb{R}$

① Équation homogène : $\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto \lambda e^{3x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$

② Solution particulière

$$y' - 3y = e^x \quad \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$= \frac{e^{x(1+i)} - e^{x(1-i)}}{2i}$$

a) second membre pour $x \mapsto e^{x(1+i)}$

pour $a \in \mathbb{C}$, on pose $f : x \mapsto a e^{x(1+i)}$

$f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) - 3f(x) = a(1+i)e^{x(1+i)} - 3ae^{x(1+i)}$

$= a(-2+i)e^{x(1+i)} = e^{x(1+i)}$ on veut

$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ — on prend $a = \frac{1}{-2+i} = \frac{-2-i}{5}$

$f_1 : x \longmapsto -\frac{(2+i)}{5} e^{x(1+i)}$ solution particulière pour le second membre $x \mapsto e^{x(1+i)}$

b) second membre $x \longmapsto e^{x(1-i)}$ conjugué du précédent

$\overline{f_1} : x \longmapsto -\frac{(2-i)}{5} e^{x(1-i)}$

$(u - iv)' = u' - iv'$

$(\overline{u+iv})' = \overline{u'+iv'}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) - 3f_1(x) = e^{x(1+i)}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\overline{f_1'(x) - 3f_1(x)} = \overline{e^{x(1+i)}}$

$(\overline{f_1})'(x) - 3\overline{f_1}(x) = e^{x(1-i)}$

donc $\overline{f_1}$ est solution particulière pour $x \longmapsto e^{x(1-i)}$

c) Théorème de superposition

Jeudi : DM envoyer en pdf

Nom.pdf

Sortien ?

exercices primitives

- ex 11
- ex 12 (au moins 1)
- ex 13 " "
- ex 14
- ex 21
- ex 15 3) et 6)

$\frac{f_1 - \overline{f_1}}{2i}$ solution particulière pour $x \longmapsto e^x \sin x$

$\underbrace{\quad}_{\mathrm{Im}(f_1)}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Im}(f_1(x)) = -\frac{1}{5}\mathrm{Im}\left((2+i)e^{x(1+i)}\right)$

$= -\frac{1}{5}\mathrm{Im}\left(e^x (2+i)(\cos x + i \sin x)\right)$

$= -\frac{1}{5}\left(e^x \cos x + 2e^x \sin x\right)$

$$S = \left\{ x \longmapsto \lambda e^{3x} - \frac{e^x}{5}(\cos x + 2\sin x),\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Récapitulatif $\quad y' - 3y = e^x \sin x$.

① S_H

② sol part $\quad -3 \in \mathbb{R}$ $\quad e^x \sin x = \mathrm{Im}(e^x \times e^{ix}) = \mathrm{Im}(e^{x(1+i)})$

polynôme × exp $\quad e^{x(1+i)} \longrightarrow$ sol particulière f_1

$\Rightarrow$ solution particulière générale : $\mathrm{Im}(f_1)$

Théorème 2.9

Exemple $\quad y' + 2y = \cos(2t)$

$S_H = \left\{ t \longmapsto \lambda e^{-2t},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

on cherche une solution particulière sous la forme $f : t \longmapsto \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$\forall t \in \mathbb{R}$

$f'(t) + 2f(t) = \underbrace{-2\lambda\sin(2t) + 2\mu\cos(2t)}_{f'(t)} + \underbrace{2\lambda\cos 2t + 2\mu\sin 2t}_{2f(t)}$

$= 2(\mu - \lambda)\sin(2t) + 2(\lambda + \mu)\cos(2t)$

on résout $\quad \begin{cases} 2(\mu - \lambda) = 0 \\ 2(\lambda + \mu) = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu - \lambda = 0 \\ \mu + \lambda = 1/2 \end{cases}$$

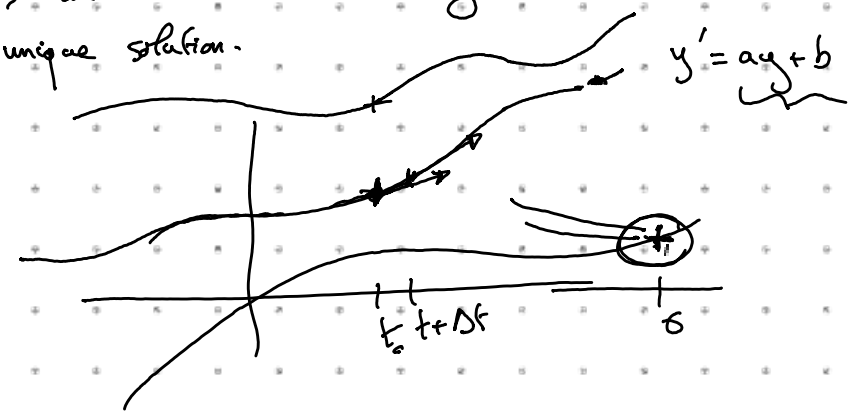
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1/4 & \frac{L_1+L_2}{2} \\ \lambda = 1/4 & \frac{L_2-L_1}{2} \end{cases}$$

$f_2 = f : t \mapsto \frac{1}{4}(\cos 2t + \sin 2t)$ est solution particulière.

donc $\mathcal{S} = \left\{ t \longmapsto \frac{1}{4}(\cos(2t) + \sin(2t)) + \lambda e^{-2t}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Définition condition de Cauchy
la donnée d'une condition initiale
pour une equation différentielle du 1er ordre définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$, une condition de Cauchy est
la donnée de $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$
une solution y vérifie la condition de Cauchy si $y(t_0) = y_0$.

Théorème un problème de Cauchy du 1er ordre
↪ une equation différentielle linéaire du 1er ordre
$a(t)y' + b(t)y = c$ ⟵ (mise sous forme résolue) etc...
↪ une condition de Cauchy
admet une unique solution.



$$\lambda e^{-A(t_0)} + \beta(t_0) = \lambda' e^{-A(t_0)} + \beta(t_0) = y_0$$

donc $\lambda e^{-A(t_0)} = \lambda' e^{-A(t_0)}$

donc $\lambda = \lambda'$

Exemple : $y' + 2y = \cos(2t)$ et $y(\pi/2) = 3$

$$\mathcal{S} = \left\{ t \longmapsto \frac{1}{4}(\cos(2t) + \sin(2t)) + \lambda e^{-2t},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$3 = f(\pi/2) = \frac{1}{4}(\cos(\pi) + \sin\pi) + \lambda e^{-\pi}$$

$$= -\frac{1}{4} + \lambda e^{-\pi}$$

donc $\lambda = \left(3 + \frac{1}{4}\right) e^{\pi} = \frac{13}{4} e^{\pi}$

donc f solution du problème de Cauchy

$$t \longmapsto \frac{1}{4}(\cos(2t) + \sin(2t)) + \frac{13}{4} e^{\pi - 2t}$$

partie F : raccordement solutions

$t^3 y' - 2y = \dots$

$y' - \frac{2}{t^3} y = \dots$

partie G : RSF (physique)

3) 2e ordre à coefficients constants (sans éventuellement le 2nd membre)

Théorème 3.1

suites $\Delta < 0$

$\lambda r^n + \mu \bar{r}^n$

$\lambda (\rho e^{i\theta})^n + \mu (\rho e^{-i\theta})^n$

$= \rho^n \lambda (\cos n\theta + i \sin n\theta) + \rho^n \mu (\cos n\theta - i \sin n\theta)$

$= \rho^n \underbrace{(\lambda + \mu)}_{\lambda'} \cos n\theta + \rho^n \underbrace{(i(\lambda - \mu))}_{\mu'} \sin(n\theta)$

$= \lambda' \rho^n \cos(n\theta) + \mu' \rho^n \sin(n\theta)$

$\in \mathbb{R}$

SUITES $\mathbb{R}^n$

$r = \rho e^{i\theta}$ forme polaire.

Equations différentielles.

EDL e^{rt}

$r = \alpha + i\beta$ forme algébrique

$\lambda e^{rt} + \mu e^{\overline{r}t}$

$= \lambda e^{(\alpha+i\beta)t} + \mu e^{(\alpha-i\beta)t}$

$= \lambda e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) + \mu e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)$

$= \underbrace{(\lambda+\mu)}_{\lambda'} e^{\alpha t}\cos(\beta t) + \underbrace{(i\lambda - i\mu)}_{\mu'} e^{\alpha t}\sin\beta t$

$\in \mathbb{R}$

Exemples de seconds membres polynômes x exponentielle

1. $y'' - 3y' + 2y = e^{4t}$

1 et 2 racines

$\chi : x^2 - 3x + 2 = 0 \iff (x-1)(x-2) = 0$

$S_H = \{ t \mapsto \lambda e^{1t} + \mu e^{2t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \}$

sol particulière $t \mapsto e^{4t}$ $(\notin S_H)$

$f : t \mapsto ae^{4t}$

$\forall t \in \mathbb{R}$ $f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = 16ae^{4t} - 12ae^{4t} + 2ae^{4t}$

$= 6ae^{4t}$

on prend $a = 1/6$

$S = \{ t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{2t} + \frac{1}{6}e^{4t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \}$

(2) $y'' - 3y' + 2y = e^{2t}$

$\mathcal{S}_H = \{ t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{2t} \ , \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \}$

sol part $f : t \mapsto at\, e^{2t}$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'(t) = (2at + a) e^{2t}$

$f''(t) = (4at + 2a + 2a) e^{2t}$

$f''(t) - 3f'(t) + 2f(t)$
$= a[\, 4at + 4a - 6at - 3a + 2at \,] e^{2t}$
$= a e^{2t}$ on prend $a = 1$.

$\mathcal{S} = \{ t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{2t} + t e^{2t} \ , \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \}$ ($a = 1$)

---

(3) $y'' + 2y' + y = e^{-t}$

$\chi : x^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x+1)^2 = 0$

$\mathcal{S}_H = \{ t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu t e^{-t} \ , \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \}$

sol part : $f : t \mapsto a t^2 e^{-t}$

$f'(t) = a(-t^2 + 2t) e^{-t}$
$f''(t) = a(t^2 - 2t - 2t + 2) e^{-t}$
$= a(t^2 - 4t + 2) e^{-t}$

$f''(t) + 2f'(t) + f(t)$
$= a(t^2 + 4t + 2 - 2t^2 + 4t + t^2)$
$= 2a e^{-t}$

donc $a = \frac{1}{2}$ convient

$\mathcal{S}_E = \{ t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu t e^{-t} + \frac{1}{2} t^2 e^{-t} \ , \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \}$