Cours du 13 novembre 2026

DM sur le site (Applications 2) pour le 26 novembre

EDL ordre 1 $\quad y' + a(t)\,y = b(t)$

hyp $\begin{cases} a, b \text{ supposées au moins } \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}) \\ I \text{ est un intervalle, } \end{cases}$ ⚠ si plusieurs intervalles, plusieurs constantes.

Thm $\begin{cases} \text{si } (a,b) \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{K}) \quad \text{avec } k \geq 0 \\ \text{alors toute solution est au moins } \mathcal{C}^{k+1}(I,\mathbb{K}) \end{cases}$ (récurrence)

Thm structure

$\mathcal{S} = \mathcal{S}_H$ "+" sol particulière

Thm Superposition

Condition de Cauchy $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K} \quad y(t_0) = y_0$

Thm existence/unicité de la solution qui vérifie une condition de Cauchy (⚠ sur un intervalle)

Coeff ac continus $\quad A$ primitive de a. $\qquad y' + a(t)\,y = b(t)$

$\mathcal{S}_H : \{ t \mapsto \lambda e^{-A(t)},\ \lambda \in \mathbb{K} \}$

sol particulière 1) intuition, constantes etc...

2) Variation de la constante

$t \mapsto \lambda(t) e^{-A(t)} \qquad \lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

λ doit être solution de $\lambda'(t) e^{-A(t)} = b(t)$

ie $\lambda'(t) = \underbrace{b(t) e^{A(t)}}$

Coef constants $\quad y' + a\,y = b(t), \quad b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$

$$\mathcal{S}_H = \{ t \mapsto \lambda e^{-at},\ \lambda \in \mathbb{K} \}$$

Sol particulière ① intuition, constante ...

② variation de la constante

$\forall t \in I,\ \lambda'(t) = b(t) e^{at}$

③ polynôme × exp. $b(t) = P(t) e^{\gamma t}$ P polynôme

$\left(\lambda'(t) = P(t) e^{(\gamma+a)t}\right)$

si $\gamma \neq -a$

on cherche $t \longmapsto Q(t) e^{\gamma t}$ $\deg Q = \deg P$

si $\gamma = -a$

on cherche $t \longmapsto \underbrace{Q(t) \times t}\, e^{\gamma t}$ $\deg Q = \deg P$

Rq : $t \longmapsto t \times Q(t)$ primitive de P

Ordre 2 coeff constants $y'' + by' + cy = d(t)$ $d \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$

I intervalle.

Thm structure si $d \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, sol $\in \mathcal{C}^{0+2}(I, \mathbb{K})$

superposition

Condition de Cauchy $(t_0, y_0, v_0) \in I \times \mathbb{K}^2$

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Existence + unicité solution au problème de Cauchy.

Eq homogène équation caractéristique $x^2 + bx + c = 0$

- 2 racines distinctes $r_1 \neq r_2$

$$\mathcal{S} = \{ t \longmapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \}$$

- 1 racine double r_1

$$\mathcal{S} = \{ t \longmapsto (\lambda + \mu t) e^{r_1 t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \}$$

- 2 racines complexes conjuguées ($b, c \in \mathbb{R}^2$ et on recherche les solutions réelles)

$r_1 = \alpha + i\beta$ $\overline{r_1} = \alpha - i\beta$

$$\mathcal{S} = \{ t \longmapsto e^{\alpha t} (\lambda \cos \beta t + \mu \sin \beta t),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \}$$

Sol particulière $y'' + by' + cy = P(t)e^{\gamma t}$

P polynomiale, γ constante.

sol part sous la forme

- si γ pas racine de l'éq caractéristique
  $t \longmapsto Q(t)e^{\gamma t}$ avec $\deg P = \deg Q$
- si γ racine simple
  $t \longmapsto Q(t) \times t e^{\gamma t}$ " " "
- si γ racine double
  $t \longmapsto \underbrace{Q(t) \times t^2} e^{\gamma t}$ " "

  { on peut prendre $t \longmapsto Q(t)t^2$
  une primitive seconde de P

Second membre $y'' + by' + cy = A\cos\omega t$

$(b, c, A, \omega) \in \mathbb{R}^4$

sol sous la forme

$t \longmapsto \underbrace{\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

si $\in S_H$ alors on prend

$t \longmapsto \alpha t\cos(\omega t) + \beta t\sin(\omega t)$

Exemples $y'' + y' + y = \cos(2t)$ **solutions réelles**

Équation caractéristique $\chi : x^2 + x + 1 = 0$

$j, \bar{j}$ solutions de χ

$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$S_H = \left\{ t \longmapsto e^{-\frac{1}{2}t}\left(\lambda\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}t + \mu\sin\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Sol particulière, on cherche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$f : t \longmapsto \alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t)$ solution particulière.

$f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R})$

$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = -2\alpha\sin(2t) + 2\beta\cos(2t)$

$f''(t) = -4\alpha\cos(2t) - 4\beta\sin(2t)$

$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f''(t) + f'(t) + f(t) = (-4\alpha + 2\beta + \alpha)\cos(2t) + (-4\beta - 2\alpha + \beta)\sin(2t)$$
$$= (-3\alpha + 2\beta)\cos(2t) + (-3\beta - 2\alpha)\sin(2t)$$

on résout $\begin{cases} -3\alpha + 2\beta = 1 \\ -3\beta - 2\alpha = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3\alpha + 2\beta = 1 \\ +2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + 5\beta = 1 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + 5\beta = 1 \\ 0\alpha + 13\beta = 2 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5\beta - 1 = 10/13 - 1 = -3/13 \\ \beta = 2/13 \end{cases}$$

$t \longmapsto -\frac{3}{13}\cos(2t) + \frac{2}{13}\sin(2t)$ est solution particulière

$$\mathcal{S} = \left\{ t \longmapsto e^{-t/2}\left(\lambda \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \mu \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{13}(-3\cos(2t) + 2\sin(2t)),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exemple $y'' + y = \cos(t)$ solutions réelles

Equation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow r \in \{i, -i\}$

$$\mathcal{S}_H = \{ t \longmapsto \lambda\cos(t) + \mu\sin(t),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \}$$



sol part $f : t \longmapsto at\cos(t) + bt\sin(t)$ $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R})$

$\forall t \in \mathbb{R}$ $f'(t) = -at\sin(t) + bt\cos(t) + a\cos(t) + b\sin(t)$

$= (-at+b)\sin(t) + (bt+a)\cos(t)$

$f''(t) = (-at+b)\cos(t) - (bt+a)\sin(t)$

$- a\sin(t) + b\cos(t)$

$= (-at+2b)\cos(t) - (bt+2a)\sin(t)$

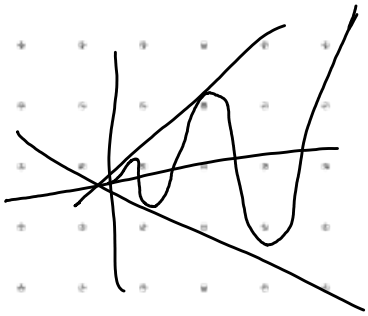
$\forall t \in \mathbb{R}$, $f''(t) + f(t) = (\cancel{-at} + 2b + \cancel{at})\cos(t) - (\cancel{bt}+2a-\cancel{bt})\sin(t)$

$= 2b\cos(t) - 2a\sin(t)$

on prend $b = \frac{1}{2}$, $a = 0$

$t \longmapsto \frac{1}{2}t\sin(t)$

$\mathcal{S} = \{ t \longmapsto \underbrace{\lambda\cos(t) + \mu\sin(t)}_{} + \underline{\frac{1}{2}t\sin(t)}, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \}$



oscillateur harmonique (partie E)

partie F : Équations fonctionnelles

Exemple on cherche toutes les fonction f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(\pi/2 - x)$

Analyse on suppose f solution.

$x \longmapsto \pi/2 - x \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$

$f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$

Donc par composition $x \longmapsto f(\pi/2 - x) \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$

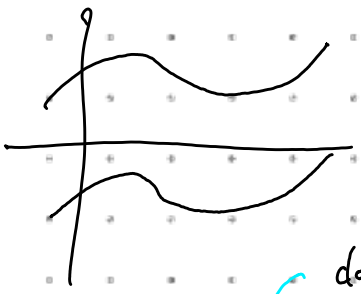
or $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(\pi/2 - x)$ donc $f' \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$

donc $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R})$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f''(x) = -f'(\underbrace{\pi/2 - x}_{X})$ $\quad$ car f solution

$= -f(\pi/2 - (\underbrace{\pi/2 - x}_{X}))$

$= -f(x)$



donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f(x) = 0$

donc $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $f : x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x$

$y'' + y = 0$

$\chi : x^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x \in \{+i, -i\}$

$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$f : t \mapsto \lambda \cos(t) + \mu \sin(t)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = -\lambda \sin x + \mu \cos x$ $\quad =$

$f(\pi/2 - x) = \lambda \cos(\pi/2 - x) + \mu \sin(\pi/2 - x)$

$= \lambda \sin x + \mu \cos x$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad \underbrace{-\lambda \sin x + \mu \cos x}_{f'(x)} = \underbrace{\lambda \sin x + \mu \cos x}_{f(\pi/2 - x)}$

$-\lambda \sin x = \lambda \sin x$

pour $x = \pi/2$ $\quad -\lambda = \lambda$ donc $\lambda = 0$

Finalement $\quad f : x \mapsto \mu \sin x$

Synthèse $\quad$ soit $\mu \in \mathbb{R}$ et on pose $f : x \mapsto \mu \sin x$.

$f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = +\mu \cos x$

$f(\pi/2 - x) = \mu \sin(\pi/2 - x) = \mu \cos x$.

donc $\quad f'(x) = f(\pi/2 - x)$

donc f solution.

Conclusion $\quad \mathcal{S} = \{x \mapsto \mu \sin x, \mu \in \mathbb{R}\}$

$y'' + \omega^2 y = 0$ $\quad \omega \in \mathbb{R}$

$\mathcal{S}_H = \{t \mapsto \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

oscillateur harmonique.

6] Changement de variable ou d'inconnue

Exemple sur $\mathbb{R}_+^*$ $\quad 4xy'' + 2y' - y = 0$

aide on pourra poser $x = t^2$ "$y(x) = y(t^2)$"

Analyse on suppose y solution. $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R})$

$\forall x > 0$, $4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0$

on pose $z : t \mapsto y(t^2)$ par composition $z \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+^*)$

$\forall t > 0$ $\begin{cases} z(t) = y(t^2) \\ z'(t) = 2t\,y'(t^2) \\ z''(t) = 2y'(t^2) + \underbrace{4t^2 y''(t^2)}_{4x\,y''(x)} \end{cases}$

$\forall x > 0$ $\begin{cases} y(x) = z(\sqrt{x}) \\ y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} z'(\sqrt{x}) \\ y''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} z'(\sqrt{x}) + \frac{1}{4x} z''(\sqrt{x}) \end{cases}$

$\forall t > 0$ donc $\underbrace{4t^2 y''(t^2) + 2y'(t^2)}_{z''(t)} - y(t^2) = 0$ $\quad$ $\forall x > 0$ $4xy''(x) + 2y'(x) - y(x)$

$= 4x\left(-\frac{1}{4x\sqrt{x}} z'(\sqrt{x}) + \frac{1}{4x} z''(\sqrt{x})\right) + 2\frac{1}{2\sqrt{x}} z'(\sqrt{x}) - z(\sqrt{x})$

$= -\frac{1}{\sqrt{x}} z'(\sqrt{x}) + z''(\sqrt{x}) + \frac{1}{\sqrt{x}} z'(\sqrt{x}) - z(\sqrt{x})$

$= z''(\sqrt{x}) - z(\sqrt{x})$

donc $\forall t > 0$ $z''(t) - z(t) = 0$

équation caractéristique $\mathcal{X} : r^2 - 1 = 0 \iff (r-1)(r+1) = 0$

donc $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$z : t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t}$

$z(t) = y(t^2)$

$x = t^2$

donc $t = \sqrt{x}$ ($t > 0$)

$y(x) = z(\sqrt{x})$

$\forall x > 0$, $\quad y(x) = z(\sqrt{x}) = \lambda e^{\sqrt{x}} + \mu e^{-\sqrt{x}}$

Synthèse : Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on pose $y : x \mapsto \lambda e^{\sqrt{x}} + \mu e^{-\sqrt{x}}$.

$\forall t > 0$, on pose $z(t) = y(t^2) \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R})$

$= \lambda e^t + \mu e^{-t}$.

$\forall t > 0$ $\quad z''(t) - z(t) = 0$

et d'après les calculs de l'analyse, on trouve

$\forall t > 0$ $\quad 4t^2 y''(t^2) + 2y'(t^2) - y(t^2) = 0$

or $t \mapsto t^2$ surjective $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$

donc $\forall x > 0$ $\quad 4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0$

donc y solution.

$\mathcal{S} = \{ x \mapsto \lambda e^{\sqrt{x}} + \mu e^{-\sqrt{x}},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \}$

Sans aide → pour les plus à l'aise

$4x\,y''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0$

au brouillon

$z(t) = y(\varphi(t))$

$z'(t) = \varphi'(t)\, y'(\varphi(t))$

$z''(t) = \varphi''(t)\, y'(\varphi(t)) + (\varphi'(t))^2 y''(\varphi(t))$

$z(t) = y(x)$

$z'(t) = \dot{x}\, y'(x)$

$z''(t) = \ddot{x}\, y'(x) + \dot{x}^2 y''(x)$

à la physicienne

$4x y'' + \dots$

$\dot{x}^2 = 4x \qquad x'(t) = 2\sqrt{x(t)}$

$\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x}$

$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \int dt$

$\boxed{\sqrt{x} = t}$

donc $x = t^2$

Exercices

ordre 1 : ex 1, ex 2, ex 3 jusqu'à trouver ça évident.

ordre 2 : ex 4, ex 5 " " (très rapide)

changements variable + ou moins : ex 8, ex 9

Marche