Inégalités

1 Opérations algébriques sur les inégalités

$$\forall a \in \mathbf{R}, \qquad x < y \iff a + x < a + y.$$

La multiplication par un nombre *strictement positif* conserve les inégalités larges et strictes :

$$\forall a > 0, \qquad x < y \iff ax < ay.$$

La multiplication par un nombre *strictement négatif* change le sens des inégalités larges et strictes :

$$\forall a < 0, \qquad x < y \iff ax > ay.$$

Le passage à l'inverse de nombres *strictement de même signe*, change le sens des inégalités :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}_+^{*}, \qquad x < y \iff \frac{1}{x} > \frac{1}{y}.$$

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}_-^{*}, \qquad x < y \iff \frac{1}{x} > \frac{1}{y}.$$

- On peut ajouter membre à membre deux inégalités de même sens :

  $$\big(x < y \quad \text{et} \quad x' \leqslant y'\big) \Rightarrow x + x' < y + y'.$$

  Remarquer que l'inégalité stricte « gagne » pour la somme.

- On peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens **si tous les termes sont positifs** :

  $$\big(0 \leqslant x < y \quad \text{et} \quad 0 < x' \leqslant y'\big) \Rightarrow xx' < yy'.$$

  Remarquer que l'inégalité stricte « gagne » pour le produit, à condition de ne pas multiplier par 0.

Remarque : Lorsqu'une propriété est vraie pour des inégalités strictes, elle est aussi vraie pour des inégalités larges. La réciproque est fausse.

⚠ Les inégalités sont un des domaines qui demandent le plus de rigueur.
Quand on doit résoudre ou établir une inégalité, il ne faut **jamais** céder à l'intuition : « c'est évident » (qui se transforme souvent en « c'est faux »).
Il faut donc **toujours** se référer à ces quelques règles et à celles qui suivent à chaque étape du raisonnement.

2 Composition d'inégalités par des fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, et $f : I \to \mathbf{R}$ une application réelle.
On dit que f est **croissante** sur I, si

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

En français : « Une fonction croissante est une fonction qui conserve les inégalités larges par passage à l'image. »

On dit que f est **strictement croissante** sur I, si

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

En français : « Une fonction *strictement* croissante est une fonction qui conserve les inégalités *strictes* par passage à l'image. »

On dit que f est **décroissante** sur I, si

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y).$$

En français : « Une fonction décroissante est une fonction qui inverse les inégalités larges par passage à l'image. »

On dit que f est **strictement décroissante** sur I, si

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

En français : « Une fonction *strictement* décroissante est une fonction qui inverse les inégalités *strictes* par passage à l'image. »
À retenir :

- Compose une inégalité par une fonction croissante préserve son sens.
- compose une inégalité par une fonction décroissante « échange » son sens.
- Pour obtenir des inégalités larges, il suffit d'une fonction (dé)croissante, pour des inégalités strictes, il faut la stricte (dé)croissance.
- Lorsque la monotonie est *stricte*, on peut passer à l'antécédent.
  Par exemple, $\ln(x) \leqslant \ln(y) \Rightarrow x \leqslant y$.

⚠ Vérifier la monotonie (croissance/décroissance) sur **tout** le domaine de validité de l'inégalité. Par exemple $x \geqslant y \not\Rightarrow x^2 \geqslant y^2$ si les signes sont quelconques, car la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas croissante sur $\mathbf{R}$.

3 Inégalités sur les antécédents

Les règles sont « contraires » à celles du passage à l'image.

Montonie stricte $\longrightarrow$ inégalités larges ou strictes.

La ***stricte*** *croissance conserve les inégalités larges ou strictes par passage à l'antécédent.*
Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, et $f : I \to \mathbf{R}$ une application réelle.
Si f est **strictement** croissante sur I, alors

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in I^2, \quad & f(x) \leqslant f(y) \Rightarrow x \leqslant y, \\ & f(x) < f(y) \Rightarrow x < y, \\ & f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow x \geqslant y, \\ & f(x) > f(y) \Rightarrow x > y. \end{aligned}$$

De même :
La ***stricte*** *décroissance « inverse » les inégalités larges ou strictes par passage à l'antécédent.*
Si f est **strictement** décroissante sur I, alors

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in I^2, \quad & f(x) \leqslant f(y) \Rightarrow x \geqslant y, \\ & f(x) < f(y) \Rightarrow x > y, \\ & f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow x \leqslant y, \\ & f(x) > f(y) \Rightarrow x < y. \end{aligned}$$

Montonie large $\longrightarrow$ inégalités strictes.

La monotonie ***large*** *ne permet que de traiter les inégalités* ***strictes.***
Si f est croissante sur I, alors

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in I^2, \quad & f(x) < f(y) \Rightarrow x < y, \\ & f(x) > f(y) \Rightarrow x > y. \end{aligned}$$

Si f est décroissante sur I, alors

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in I^2, \quad & f(x) < f(y) \Rightarrow x > y, \\ & f(x) > f(y) \Rightarrow x < y. \end{aligned}$$

4 Inégalités sur les fonctions usuelles

Elle se démontrent facilement par l'étude des fonctions associées ou avec un argument de convexité, ou encore l'inégalité des accroissements finis.

	Inégalité	**Domaine**
	$\ln(1+x) \leqslant x$	$x > -1$
	$e^x \geqslant 1+x$	$x \in \mathbf{R}$
$\star$	$\tan x \geqslant x$	$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$
$\star$	$\sin x \leqslant x$	$x \geqslant 0$
	$\lvert\sin x\rvert \leqslant \lvert x\rvert$	$x \in \mathbf{R}$

5 Comment trouver des inégalités

Différentes pistes pour trouver/prouver des inégalités :
Sera travaillé au cours de l'année : si tout n'est pas clair ici, ce n'est pas grave.

- Dépend d'un argument réel :
  - Étudier la fonction, trouver un maximum, ou comparer avec une tangente. (comme pour les inégalités usuelles plus haut)
  - Utiliser le théorème des bornes atteintes
    - pour une fonction continue sur un segment.
    - adapté pour des problèmes abstraits.
- Pour une somme :
  - majorer/minorer terme à terme.
  - utiliser l'inégalité triangulaire.
- Pour une suite (dépend d'un argument entier) :
  - utiliser la croissance ou décroissance,
  - conjecture + preuve par récurrence.
  - utiliser le caractère convergent.
    - toute suite convergente est bornée.
    - adapté pour des problèmes abstraits.