Développements limités

1 Développements limités en 0

e^{ax}	$= 1 + ax + \dfrac{(ax)^2}{2} + \dfrac{(ax)^3}{3!} + \cdots + \dfrac{(ax)^n}{n!} + o(x^n)$	$= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} x^k + o(x^n)$
$\dfrac{1}{1-x}$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \cdots + x^n + o(x^n)$	$= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + o\left(x^n\right)$ penser à la série géométrique
$\dfrac{1}{1+x}$	$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$	$= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o\left(x^n\right)$
$(1+x)^\alpha$	$= 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\cdots)(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o\left(x^n\right)$	$= 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\cdots)(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o\left(x^n\right)$
$\cos x$	$= 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n})$	$= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o\left(x^{2n}\right)$
$\sin x$	$= x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$	$= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$
$\ln(1+x)$	$= x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + o(x^n)$	$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + o\left(x^n\right)$
$\ln(1-x)$	$= -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \cdots - \dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$	$= -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o\left(x^n\right)$

2 Équivalents usuels en 0

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2} \qquad \tan x \sim x$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \qquad \arctan x \underset{x\to 0}{\sim} x$$

avec $\alpha \neq 0$.

3 Position par rapport à la tangente

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + o_{x_0}\left((x - x_0)^p\right)$$

Si p est pair		Si p est impair	
$a_p < 0$	$a_p > 0$	$a_p < 0$	$a_p > 0$