conjonction « et »	$p \wedge q$	Vrai si p et q sont simultanément vrais.
disjonction « ou »	$p \vee q$	Vrai si moins une des assertions est vraie.
contraire	$\neg p$ ou non(p)	On parle aussi de *négation*.
appartenance	$x \in E$	x appartient à l'ensemble E
	$x \notin E$	x n'appartient pas à E
quantificateur universel	$\forall x \in E, p$	Tous les éléments de E vérifient l'assertion p. On lit « pour tout x dans E » ou « quelque soit x dans E ».
quantificateur existentiel	$\exists x \in E, p$	Il existe (au moins) un élément de E qui vérifie l'assertion p. On lit « il existe x dans E ».
	$\exists\, ! x \in E$	On lit : « il existe un *unique* x dans E »
équivalence	$p \iff q$	Vrai si p et q ont même valeur de vérité. On dit « p est vraie *si et seulement si* q est vraie ».
implication	$p \Rightarrow q$	« *Si p, alors q* ». $p \Rightarrow q$ est vraie si et seulement si $\begin{cases} p \text{ est fausse,} \\ \text{ou } p \text{ et } q \text{ simultanément sont vraies.} \end{cases}$
réciproque		La réciproque de $p \Rightarrow q$ est $q \Rightarrow p$
condition suffisante	$p \Rightarrow q$	p est une *condition suffisante* pour que q soit vraie.
condition nécessaire	$p \Leftarrow q$	p est une *condition nécéssaire* pour que q soit vraie.
condition nécessaire et suffisante	$p \iff q$	p est une *condition nécessaire et suffisante* pour que q soit vraie.

- **Associativité** (« *et* »,« *ou* »)

$$(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r) \quad \text{et} \quad (p \vee q) \vee r \iff p \vee (q \vee r)$$

- **Commutativité** (« *et* »,« *ou* »)

$$p \wedge q \iff q \wedge p \quad \text{et} \quad p \vee q \iff q \vee p$$

- **Distributivité** (« *et* » par rapport au « *ou* »)

$$p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

- **Distributivité** (« *ou* » par rapport au « *et* »)

$$p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

- **Lois de De Morgan**

  La négation de « $\forall x \in E,\ p$ » est « $\exists x \in E,\ \neg p$ ».

  La négation de « $\exists x \in E,\ p$ » est « $\forall x \in E,\ \neg p$ ».

  La négation de « $p \wedge q$ » est « $(\neg p) \vee (\neg q)$ ».

  La négation de « $p \vee q$ » est « $(\neg p) \wedge (\neg q)$ ».

- **Implication**

  $p \Rightarrow q$ si et seulement si $(\neg p) \vee q$

  $\neg(p \Rightarrow q)$ si et seulement si $p \wedge (\neg q)$ *(négation)*

  Si $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ alors $p \Rightarrow r$ *(transitivité)*

  $p \Rightarrow q$ si et seulement si $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ *(contraposée)*

  $p \iff q$ si et seulement si $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ *(double implication)*

On veut prouver	**On écrit**
« $\forall x \cdots$ »	« Soit x... » (x est quelconque)
« $\exists x \cdots$ »	« On pose x... » (On cherche un x particulier qui convient)

On sait	**On écrit**
« $\forall x \cdots$ »	on peut donner à x différentes valeurs.
« $\exists x \cdots$ »	x est fixé à une certaine valeur (en général inconnue). On l'utilise tel quel.

Ensembles

Égalité d'ensembles	$E = F$	E et F ont exactement les mêmes éléments. $E = F \iff \forall x \quad \big(x \in E \iff x \in F\big)$
Inclusion	$E \subset F$	Tous les éléments de E appartiennent à F. on dit que E **est inclus dans** F, ou que F **contient** E, ou que E est **une partie** de F $E \subset F \iff \forall x \quad \big(x \in E \Rightarrow x \in F\big)$
Parties d'un ensemble	$\mathcal{P}(E)$	Les ensembles inclus dans E. $A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$
Réunion	$E \cup F$	Éléments de E et de F mis ensemble $E \cup F = \{x \text{ tel que } x \in E \textbf{ ou } x \in F\}$
Intersection	$E \cap F$	Éléments appartenant **à la fois** à E et à F $E \cap F = \{x \text{ tel que } x \in E \textbf{ et } x \in F\}$
Ensembles disjoints	$E \cap F = \emptyset$	E et F n'ont aucun élément commun.
Complémentaire	$\complement_E F$ ou $E \setminus F$ ou $\overline{F}$	Complémentaire de F dans E, Éléments de E n'appartenant pas à F. $\complement_E F = \{x \in E \text{ tel que } x \notin F\}$
Produit cartésien	$E \times F$	Ensemble des **couples** $E \times F = \big\{(x, y) \text{ tel que } x \in E, y \in F\big\}$
	E^2	$= E \times F$.
		se généralise à n ensembles.
n-uplet		Élément de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \prod_{i=1}^{n} E_i$
p-liste		Élément de E^n. (cas particulier de p-uplet)
Famille	$(x_i)_{i \in I}$	Suite d'éléments indexés par I (I est l'ensemble des **indices**) Si $I = [\![1; p]\!]$, on retrouve les p-listes.
	E^I	Ensemble des familles de E indexées par I.

1 Ensembles de nombres

N les entier naturels $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots$

Z les entier relatifs $\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2, \ldots$

Q les rationnels (quotients de deux entiers) $\frac{1}{4},\ \frac{2}{825},\ -\frac{5}{3},\ 3,5 = \frac{35}{10},\ \ldots$

R les réels $0,\ 5,\ -4,\ \frac{2}{3},\ -\frac{3}{7},\ \pi, \ldots$

C les complexes $3 + 2i,\ 5i,\ -2\sqrt{3}(1+i),\ 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}, \cdots$

- Une **étoile** en exposant si l'ensemble est privé de l'élément 0 : $\mathbf{N}^* = \{n \geq 1\}$
- Un « **plus** » en exposant ou en indice pour les positifs : $\mathbf{R}_+ = \mathbf{R}^+ = [0, +\infty[$, $\mathbf{Z}^+ = \mathbf{N}$, $\mathbf{R}_+^* =]0, +\infty[$.
- Un « **moins** » pour les nombres négatifs (ou nuls) : $\mathbf{R}_- =]-\infty, 0]$.

2 Méthodes

Prouver une inclusion :
Pour montrer $A \subset B$ on montre que tous les éléments de A sont aussi dans B.
Concrètement, on prend x *quelconque* dans A et on montre que $x \in B$.

Prouver une égalité par double inclusion :

$$E = F \iff \big(E \subset F \textbf{ et } F \subset E\big)$$

3 Propriétés

Involutivité du complémentaire : $\overline{\overline{A}} = A$

Distributivité :

$$\big(A_1 \cup A_2\big) \cap B = \big(A_1 \cap B\big) \cup \big(A_2 \cap B\big)$$
$$\big(A_1 \cap A_2\big) \cup B = \big(A_1 \cup B\big) \cap \big(A_2 \cup B\big)$$

$$\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \cap B = \bigcup_{i \in I}(A_i \cap B)$$
$$\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) \cup B = \bigcap_{i \in I}(A_i \cup B)$$

Formules de De Morgan :

$$\complement_E\big(A \cup B\big) = \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \text{et} \qquad \complement_E\big(A \cap B\big) = \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\complement_E\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \bigcap_{i \in I} \complement_E A_i \qquad \text{et} \qquad \complement_E\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \bigcup_{i \in I} \complement_E A_i$$

Types de raisonnement

Déduction	Partir d'hypothèses et arriver à la conclusion par une suite d'implications. Elle s'appuie sur le raisonnement « *Si... , alors...* ».
Contraposée	Si la conséquence est fausse, c'est que sa cause n'est pas vérifiée.
Raisonnement par l'absurde	Pour démontrer qu'une proposition est vraie, on montre qu'il est absurde de la supposer fausse.
Disjonction des cas	Pour montrer qu'une propriété est vraie dans certains cas, on étudie chaque situation séparément.
Analyse-synthèse	Pour répondre à la question « montrer qu'il existe un unique ... tel que ... ». **Analyse :** on commence par supposer que l'on connait ces solutions et on en déduit des conditions qu'elles doivent vérifier. **Synthèse :** on montre que si un objet vérifie ces conditions, alors il est bien solution.
Récurrence	Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$. **Rédaction :** « Prouvons le résultat par récurrence ». Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$. *1 - Initialisation :* On vérifie que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. *2 - Hérédité :* Pour $n \geq 0$ *quelconque fixé*, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, on montre alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. *3 - Conclusion.*
Récurrence double	*1* - On montre que $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies, *2* - On suppose que pour $n \in \mathbf{N}$ *quelconque fixé*, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, on montre alors que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
Récurrence forte	*1* - On montre que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, *2* - On suppose que pour $n \in \mathbf{N}$ *quelconque fixé*, les assertions $\mathcal{P}(k)$ sont vraies pour tous les $k \leq n$, et on montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.