Limites et continuité

1 Définition des limites avec les quantificateurs

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$: $\forall M>0,\ \exists x_0>0,\ \forall x\in I,\ x\geq x_0 \Rightarrow f(x)\geq M.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$: $\forall \varepsilon>0,\ \exists x_0>0,\ \forall x\in I,\ x\geq x_0 \Rightarrow |f(x)-\ell|\leq \varepsilon.$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$: $\forall M>0,\ \exists \eta>0,\ \forall x\in I,\ |x-a|\leq\eta \Rightarrow f(x)\geq M.$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$: $\forall \varepsilon>0,\ \exists \eta>0,\ \forall x\in I,\ |x-a|\leq\eta \Rightarrow |f(x)-\ell|\leq \varepsilon.$

2 Continuité

f est **continue** en a

- si et seulement si $f(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
- si et seulement si

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \eta>0,\ \forall x\in I,\ |x-a|\leq\eta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(a)|\leq\varepsilon.$$

3 Propriétés séquentielles

Soit $(a,b)\in(\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\})^2$. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} b$, alors $f(u_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} b$.

En particulier, si f continue en $a\in I$. $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)=f(a)$.

4 À gauche ou à droite

- Limite en a : le point a **est compris** dans les valeurs atteintes si f est définie en a.
- Limite à gauche, à droite de a : le point a **n'est pas compris** dans les valeurs possibles (même si f est définie en a).

  $\rightarrow$ f peut avoir une limite à gauche et une limite à droite, égales, sans avoir de limite en a (si $f(a)$ est différent de cette limite commune).
- Continuité en a : le point a **est compris** dans les valeurs atteintes.
- Continuité à gauche et à droite de a : le point a **est compris** dans les valeurs atteintes.

  $\rightarrow$ si f est continue à droite et à gauche, alors f est continue au point.

5 Théorèmes

Soit $a\in\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$

1. Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.
2. Si f admet une limite finie non nulle en a alors f est du même signe que sa limite au voisinage de a.

f,φ,ψ désignent des applications définies sur I et $a\in\overline{I}$.

Stabilité des inégalités larges

On suppose que :
- $\forall x\in I,\ f(x)\leq\psi(x)$,
- f et ψ admettent des limites en a.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to a} f(x)\leq\lim\limits_{x\to a}\psi(x)$.

Théorème d'encadrement ou des gendarmes

On suppose que :
- $\forall x\in I, \varphi(x)\leq f(x)\leq\psi(x)$,
- φ et ψ admettent une limite finie commune ℓ en a.

Conclusion : f admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$.

Théorème de minoration – *théorème majoration pour $-\infty$ (en majorant).*

On suppose que :
- $\forall x\in I, \varphi(x)\leq f(x)$,
- $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=+\infty$.

Conclusion : f admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.

Théorème de la limite monotone

On suppose que :
- $I=]\alpha,\beta[$ un intervalle **ouvert**,
- f est **croissante** sur I.

Conclusion : f admet des limites en α et en β (éventuellement infinies).

Théorème des valeurs intermédiaires

3 formulations équivalentes :

- Si f est continue sur un intervalle I contenant $[a,b]$, alors f prend toutes les valeurs situées entre $f(a)$ et $f(b)$.
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- Si f est continue sur un intervalle I tel qu'il existe $(a,b)\in I$, avec $f(a)f(b)\leq 0$ (de signes contraires), alors f s'annule entre a et b.

Théorème des bornes atteintes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes (elle possède un maximum et un minimum.)

Autre formulation : L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Théorème de la bijection continue

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I alors

- $f(I)=J$ est un intervalle,
- f est un bijective de I sur $f(I)$,
- f^{-1} est également bijective, continue et de même monotonie que f.