Séries numériques

1 Vocabulaire

- **Série** de terme général u_n : $\sum u_n$,
- **Suite des sommes partielles :** $(S_n)_{n\in\mathbf{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$.
- **Nature :** converge ou diverge

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge.}$$

$$\text{La série converge} \iff \text{la suite des sommes partielles converge.}$$

→ On ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de termes.

Si la série converge :

- **Somme de la série :** la limite des sommes partielles est notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.
- **Reste d'ordre** n **:** $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, $\quad R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2 Opérations sur les séries convergentes

- Si $\lambda \neq 0$, alors $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ ont la même nature.
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum (u_n + v_n)$ converge.

En cas de convergence : $\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + \lambda v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.

3 Condition nécessaire de convergence

Si $\sum u_n$ converge, alors (u_n) converge vers 0 (la réciproque est *fausse*).

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad u_n \to 0.$$

Contraposée : Si u_n ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge *grossièrement*.

4 Condition suffisante de convergence

Si la série converge absolument, alors elle converge (la réciproque est *fausse*).

$$\sum |u_k| \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \sum u_k \text{ converge.}$$

5 Liens suites - séries

- $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge si, et seulement si, la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.
- Si (S_n) est une suite de sommes partielles associée à la série $\sum u_n$, alors,

$$u_0 = S_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = S_n - S_{n-1}$$

6 Séries usuelles

Les **séries géométriques** et dérivées convergent si et seulement si $|q| < 1$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n q^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Ls **série de Riemann** $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si $\alpha > 1$.

La série **exponentielle** $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout $x \in \mathbf{R}$: $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

7 Critères de convergence des séries à termes positifs

Théorème de la limite montone :
Toute série à termes positifs admet une limite dans $[0, +\infty]$.
La série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

Comparaison série intégrale
Si f est une fonction **positive** décroissante sur $\mathbf{R}_+$,
alors, la série $\sum f(n)$ est de même nature que la suite $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

Critères de comparaison
Soient (u_n) et (v_n) deux suites **positives**,

- Si $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leqslant v_n$,
  - si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$
  - si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.
- Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
- Si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- *Comparaison aux suites usuelles*
  - S'il existe $\alpha > 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ majorée, alors $\sum u_n$ converge.
  - S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ tend vers $\ell \in \mathbf{R}^* \cup \{\pm\infty\}$, alors $\sum u_n$ diverge.
  - S'il existe $q > 1$ tel que $(q^n u_n)$ majorée, alors $\sum u_n$ converge.
- *Critère de d'Alembert*
  Si (u_n) est à termes **strictement** positifs, telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \geqslant 0$.
  - Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
  - Si $\ell = 1$, ce théorème ne permet pas de conclure.
  - Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Séries doubles Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}^2} \in (\mathbf{R}_+)^{\mathbf{N}^2}$, une suite positive à deux indices.

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}.$$

Avec la convention que « $(+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty$ » pour $a \in \mathbf{R}$.