Variables aléatoires finies

1 Fonction de probabilité

$$\mathbf{P}(X=x) = \mathbf{P}\left(X^{-1}(\{x\})\right) = \mathbf{P}(\{\omega,\ \text{tel que } X(\omega)=x\})$$
$$\mathbf{P}(X\in\mathcal{X}') = \mathbf{P}\left(X^{-1}(\mathcal{X}')\right) = \mathbf{P}(\{\omega,\ \text{tel que } X(\omega)\in\mathcal{X}'\}) = \sum_{x\in\mathcal{X}'}\mathbf{P}(X=x)$$

$\{[X=x],\ x\in\mathcal{X}\}$ forme un **système complet d'événements** de Ω.

2 Fonction de répartition

$$F_X : \left\{\begin{array}{lll} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \mathbf{P}(X\leq x) = \sum\limits_{x_i\leq x}\mathbf{P}(X=x_i) \end{array}\right\}$$

F_X est positive, croissante et $\lim\limits_{x\to-\infty}F_X(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}F_X(x)=1$.

Si $X(\Omega)\subset\mathbf{Z}$, alors $\forall k\in\mathbf{Z},\ \mathbf{P}(X=k)=\mathbf{P}(X\leq k)-\mathbf{P}(X\leq k-1)$.

Quantile d'ordre r **:** $q_r = \max\left(x_i\in\mathcal{X},\ \text{tel que } F(x_i)\leq r\right)$

- **Médiane** de X : quantile d'ordre $\frac{1}{2}$.
- **Quartile** de X : quantile d'ordre $\frac{1}{4}$.
- **Décile** de X : quantile d'ordre $\frac{1}{10}$.

3 Espérance

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\}) = \sum_{x\in X(\Omega)}x\mathbf{P}(X=x)$$

$$\mathbf{E}\left(u(X)\right) = \sum_{x\in X(\Omega)}u(x)\mathbf{P}(X=x) \qquad \text{(Théorème de transfert)}$$

1. $\forall(a,b)\in\mathbf{R}^2,\ \mathbf{E}(aX+bY)=a\mathbf{E}(X)+b\mathbf{E}(Y)$ (linéarité)
2. Si $\exists a\in\mathbf{R},\ \forall\omega\in\Omega,\ X(\omega)=a,$ alors $\mathbf{E}(X)=a$.
3. $\left|\mathbf{E}(X)\right|\leq\mathbf{E}\left(|X|\right)$ (inégalité triangulaire)
4. si $X\geq 0$, alors $\mathbf{E}(X)\geq 0$ (positivité)
5. si $X\leq Y$, alors $\mathbf{E}(X)\leq\mathbf{E}(Y)$ (croissance)

Moment d'ordre k de X : $\mathbf{E}\left(X^k\right) = \sum\limits_{x\in X(\Omega)}x^k\mathbf{P}(X=x)$

4 Variance

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(\left(X-\mathbf{E}(X)\right)^2\right) = \mathbf{E}\left(X^2\right)-\left(\mathbf{E}(X)\right)^2 \qquad \text{(Koenig-Huygens)}$$

1. $\mathbf{V}(aX+b)=a^2\,\mathbf{V}(X)a$.
2. $\mathbf{V}(X)\geq 0$.
3. $\mathbf{V}(X)=0 \iff \left(\exists\, a\in\mathcal{X},\ \mathbf{P}\left(X=a\right)=1\right) \iff X=\mathbf{E}(X)$

5 Écart type

$$\sigma_X=\sigma(X)=\sqrt{\mathbf{V}(X)}$$

Variable aléatoire centrée réduite : $X^* = \dfrac{X-\mathbf{E}(X)}{\sigma_X}$.

6 Inégalités

Inégalité de Markov :
Si $X\geq 0$ et $a>0$,

$$\boxed{\mathbf{P}(X\geq a)\leq\frac{\mathbf{E}(X)}{a}.}$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\left|X-\mathbf{E}(X)\right|\geq a\right)\leq\frac{\sigma_X^2}{a^2}.}$$

Loi		**Exemple type**	$X(\Omega)$		$\mathbf{E}(X)$	σ_X
Loi certaine		situation déterministe	$\{m\}$	$\mathbf{P}(X=m)=1$	m	0
Loi uniforme	$\mathcal{U}([\![1,n]\!])$	lancer d'un dé équilibré	$[\![1,n]\!]$	$\mathbf{P}(X=k)=\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Loi de Bernoulli	$\mathcal{B}(p),\ p\in]0,1[$	tirage à deux issues	$\{0,1\}$	$\mathbf{P}(X=1)=p$	p	$\sqrt{pq}$
Loi binomiale	$\mathcal{B}(n,p),\ p\in]0,1[$	tirage avec remise	$\{0,n\}$	$\mathbf{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k\left(1-p\right)^{n-k}$	np	$\sqrt{npq}$