Variables aléatoires dénombrables

1 Définitions

Ensemble des événements (tribu) :
$\mathcal{E} \subset \Omega$ tel que
1. $\Omega \in \mathcal{E}$.
2. $A \in \mathcal{E} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{E}$.
3. $\forall (A_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{E}^{\mathbf{N}}, \ \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathcal{E}$.

Probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{E})$:
1. $\forall A \in \mathcal{E}, \ \mathbf{P}(A) \in [0,1]$.
2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.
3. $\forall (A_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{E}^{\mathbf{N}}$, deux à deux **disjoints**, $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$.

Théorème de la limite monotone croissante :
$\forall (B_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{E}^{\mathbf{N}}$, tel que $\forall k \in \mathbf{N}, \ B_k \subset B_{k+1}, \ \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_n)$.

Théorème de la limite monotone décroissante :
$\forall (B_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{E}^{\mathbf{N}}$, tel que $\forall k \in \mathbf{N}, \ B_{k+1} \subset B_k, \ \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_n)$.

Famille quasi-complète d'événements:

1. Les événements B_i sont deux à deux incompatibles,
2. $\sum_{i\in I} \mathbf{P}(B_i) = 1$.

→ Les formules des probabilités totales et formule de Bayes sont valables pour les famille quasi-complètes d'événements.

Variable aléatoire discrète : $X(\Omega)$ est dénombrable.
Il s'écrit sous la $\mathcal{X} = \{x_i, i \in I\}$ avec $I = \mathbf{N}, \mathbf{N}^*, \mathbf{Z}$...

$$\{[X = x_i], i \in I\} \text{ est une famille complète d'événements.}$$

2 Espérance, moments

Soit X une variable aléatoire dénombrable à valeurs dans $\mathcal{X} = \{x_i, \ i \in I\} \subset \mathbf{R}$.

Espérance : si la série $\sum_{i\in I} x_i \mathbf{P}(X = x_i)$ est **absolument convergente.**

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i\in I} x_i \mathbf{P}(X = x_i).$$

L'espérance est *linéaire* et *croissante.*

Théorème de transfert $u(X)$ admet une espérance si et seulement si $\sum u(x)\mathbf{P}(X = x)$ converge absolument pour $x \in \mathcal{X}$ et dans ce cas,

$$\mathbf{E}(u(X)) = \sum_{x\in\mathcal{X}} u(x)\mathbf{P}(X = x).$$

Moment d'ordre k : (sous réserve de convergence absolue)

$$\mathbf{E}\left(X^k\right) = \sum_{x\in\mathcal{X}} x^k \mathbf{P}(X = x).$$

Existence de l'ordre $p \Rightarrow$ tous les ordres $\leqslant p$.

Variance : (sous réserve d'ordre 2) $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^2\right)$.
Écart type : (sous réserve d'ordre 2) $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Propriétés de la variance :

1. (*positivité*) $\mathbf{V}(X) \geqslant 0$ et $\mathbf{V}(X) = 0$ ssi X est presque certaine.
2. (*Formule de Koënig-Huygens*) $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2$.
3. Si $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, alors $\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$.

Inégalités de Markov, Bienaymé-Tchebychev restent valable sous réserve d'existence des moments correspondants.

3 Lois usuelles

Loi géométrique :
Répétition infinie d'une même expérience de façon indépendante :
T = rang du premier succès. p = probabilité du succès à chaque essai.

$$T(\Omega) = \mathbf{N}^*, \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbf{N}^*, \ \mathbf{P}(T = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Non vieillissement : $\forall j \in \mathbf{N}, \forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(X > j + k \mid X > j) = \mathbf{P}(X > k)$.

Loi de Poisson : Nombre d'occurrences d'un événement rare.

$$X(\Omega) = \mathbf{N}, \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbf{N}, \ \mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

$$\mathbf{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \lambda.$$

Approximation de la loi binomiale : Si $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $np_n \to \lambda > 0$. alors,

$$\forall k \in \mathbf{N}, \ \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}(X = k) \ \text{avec } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda).$$