

SOMMES

Remarque : Une somme vide est nulle.

1 SOMMES USUELLES

Constantes :

$$\boxed{(\text{nombre de termes}) \times a}$$

$$\sum_{k=m}^n a = (n - m + 1)a$$

Somme arithmétique :

$$\boxed{(\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{somme des termes extrêmes}}{2}}$$

Si (u_n) est une suite arithmétique, $m \leq n$

$$\sum_{k=m}^n u_k = (n - m + 1) \frac{u_n + u_m}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n u_k = (n + 1) \frac{u_n + u_0}{2}$$

Cas particulier :

$$\sum_{k=m}^n k = \frac{(n - m + 1)(n + m)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Somme géométrique :

$$\boxed{(\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}}$$

Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$, $m \leq n$

$$\sum_{k=m}^n u_k = u_m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Cas particulier :

$$\sum_{k=m}^n q^k = q^m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Sommes d'Euler

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

2 MÉTHODES DE CALCUL

La linéarité : « couper la somme en petits morceaux »

$$\sum_{k=m}^n (\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k=m}^n u_k + \sum_{k=m}^n v_k$$

Décalage d'indice :

$$\sum_{k=m}^n a_{k+1} = \sum_{j=m+1}^{n+1} a_j$$

Exemples : $\sum_{k=0}^n q^k$ et $\sum_{k=0}^n k$.

Somme télescopique :

$$\sum_{k=m}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m$$

Exemple : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

Partition de l'ensemble de sommation : on sépare la somme, par exemple sur le critère de la parité :

Exemple : $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$

3 SOMMES DOUBLES

Penser à échanger de l'ordre de sommation.

Pour la méthode, écrire les relations sous forme d'une chaîne d'inégalités.

Exemple : $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{j}$.

PRODUITS

Remarque : Un produit vide est égal à 1.

1 RÈGLES DE CALCUL

$$\prod_{k=m}^n a_k b_k = \left(\prod_{k=m}^n a_k \right) \left(\prod_{k=m}^n b_k \right) \quad \prod_{k=m}^n a_k^\alpha = \left(\prod_{k=m}^n a_k \right)^\alpha$$

$$\prod_{k=m}^n \lambda a_k = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^n a_k$$

Exemple : $\prod_{k=1}^n 5\sqrt{k}(k+3)$.

Produit télescopique : si les (a_k) ne s'annulent pas, alors

$$\prod_{k=m}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}$$

Exemple : $\prod_{k=1}^n \frac{k+3}{k}$.

2 FACTORIELLE

$$n! = \prod_{k=1}^n k$$

Par convention : $0! = 1$

3 COEFFICIENTS BINOMIAUX

A Définition

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Par convention : si $n < k$, alors $\binom{n}{k} = 0$

B Propriétés remarquables

$\forall n \geq k \in \mathbf{N}^2$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^k \frac{n-k+i}{i}$$

Valeurs remarquables : $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$

et $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$

Symétrie : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

« formule sans nom » : $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$ pour $k \neq 0$

Triangle de Pascal : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

La formule de Pascal est aussi valable pour $n < k$

Exemple : Pour $p \leq n$, calcul de $\sum_{k=0}^n \binom{k}{p}$.

4 FORMULES CALCULATOIRES

Égalité de Bernoulli

$\forall (a, b) \in \mathbf{C}^2, \forall n \in \mathbf{N}$,

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} = (a-b) \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k$$

Binôme de Newton

$\forall (a, b) \in \mathbf{C}^2, \forall n \in \mathbf{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

Exemple : Pour $x \in \mathbf{R}$, développement (rapide) de $(1+x)^7$.