Suites usuelles

1 Suite arithmétique

$$u_{n+1} = u_n + r$$

$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = u_0 + nr$
$\forall (p,n) \in \mathbf{N}^2, \quad u_n = u_p + (n-p)r$

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \frac{(u_m + u_n)(n-m+1)}{2}$$

$$\frac{(\text{« 1}^{\text{er}}\text{ terme »} + \text{« der}^{\text{r}}\text{ terme »}) \times (\text{« nbre termes »})}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2 Suite géométrique

$$u_{n+1} = q u_n$$

$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = q^n u_0$
$\forall (p,n) \in \mathbf{N}^2, \quad p \leq n \Rightarrow u_n = q^{n-p} u_p$
Pour $q \neq 1$,

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1-q}$$

$$(\text{« 1}^{\text{er}}\text{ terme »}) \times \frac{1 - q^{\text{« nbre termes »}}}{1-q}$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

3 Suite arithmético-géométrique

$$u_{n+1} = a u_n + b \qquad \text{avec} \quad a \neq 1$$

Point fixe : ℓ solution de l'équation $x = ax + b$

$(u_n - \ell)$ suite géométrique de raison a.

- Si $u_0 = \ell$, alors la suite est constante égale à ℓ.
- Si $u_0 \neq \ell$, alors
  - si $|a| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$
  - si $a > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$ (le signe de la limite est celui de $u_0 - \ell$)
  - si $a \leq -1$, alors u_n n'admet pas de limite en $+\infty$.

4 Suite récurrente linéaire d'ordre 2

$$u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \qquad \text{avec} \quad (a,b) \in \mathbf{R}^2 \text{ et } b \neq 0$$

Équation caractéristique : $x^2 = ax + b$ de discriminant Δ

- Si $\Delta > 0$, on note (r_1, r_2) les deux solutions de l'équation caractéristique, alors $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, tel que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$
- Si $\Delta = 0$, on note r la racine double de l'équation caractéristique, alors $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, tel que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \lambda r^n + \mu \boldsymbol{n} r^n$$
- Si $\Delta < 0$, on note $r_\pm = \rho\, \mathrm{e}^{\pm i\theta}$ les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique, alors $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, tel que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$$

λ et μ sont déterminés de façon unique par u_0 et u_1.

Suite récurrente avec second membre :
Solutions = solutions homogènes + solution particulière

Méthodes à connaître

- **Ordre 2 avec second membre**

  → **Chercher une solution particulière** et appliquer le théorème de structure.

  En général la solution particulière est immédiate. si c'est n'est pas le cas et que le second membre est constant, on peut chercher sous la forme $u_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$.

- **Relation de récurrence non linéaire**

  → **Introduire une suite auxiliaire**

  Si la relation de récurrence est constituée de produit et de puissances, on peut faire intervenir le **logarithme** de la suite (en justifiant qu'on a le droit).

  Exemple : si $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n^2$, alors on pose $v_n = \ln(u_n)$ et on cherche la relation de récurrence vérifiée par (v_n).

- **Couples de suites vérifiant des relations d'ordre 1 dépendant l'une de l'autre**

  → **Passer à l'ordre 2** et tout exprimer en fonction de la même suite.

  Exemple : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n - v_n \end{cases}$

- ...