

1 DÉFINITION

- f est **dérivable** en a
 - si son taux d'accroissement admet une limite finie en a .

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

- ou si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a :

$$\exists \lambda \in \mathbf{R}, \forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \lambda(x - a) + (x - a) \varepsilon_a(x)$$

avec ε_a une fonction définie sur I telle que $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_a(x) = 0$.

Dans ce cas, $\lambda = f'(a)$.

- f est **dérivable à gauche** en a
 - si son taux d'accroissement admet une limite finie à gauche a .
 - ou si f admet un **développement limité à l'ordre 1** à gauche en a .

Dérivable à gauche + dérivable à droite \Rightarrow (dérivable au point ssi $f'_g(a) = f'_d(a)$).

- **Tangente :** $T(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$.

2 CLASSES DE FONCTIONS

Dérivée k -ième : On note $f^{(k)}(a)$ la dérivée k -ième de f en a , et on pose $f^{(0)} = f$.

$f \in \mathcal{D}^k(I)$, si f admet une dérivée k -ième en tout point de I .

$f \in \mathcal{C}^k(I)$, si f admet des dérivées k -ième sur I et si celles-ci sont continues.
On dit que f est de classe \mathcal{C}^k sur I .

$f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ si f est de classe $\mathcal{C}^k(I)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

$f \in \mathcal{C}^0(I)$ si f est de continue sur I .

Si f est de classe \mathcal{C}^k de I à valeurs dans J on note aussi $f \in \mathcal{C}^k(I, J)$.

3 THÉORÈMES

$(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$.

Extremum et point critique

Soit f définie sur I et dérivable en $a \in I$ **qui n'est pas une borne** de I .

Si f admet un **extremum local** en a , alors $f'(a) = 0$.

Théorème de Rolle

- Si
- f est continue sur $[a, b]$ (*fermé*),
 - f est dérivable sur $]a, b[$ (*ouvert*),
 - $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ (*ouvert*) tel que $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis

- Si
- f est continue sur $[a, b]$ (*fermé*),
 - f est dérivable sur $]a, b[$ (*ouvert*).

Alors il existe $c \in]a, b[$ (*ouvert*) tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Inégalité des accroissements finis

- Si
- f est continue sur $[a, b]$ (*fermé*),
 - f est dérivable sur $]a, b[$ (*ouvert*),
 - $\exists m \leq M$ tels que $\forall x \in]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$.

Alors, $\forall (x, y) \in ([a, b])^2$, tels que $x \leq y$,

$$m(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y - x).$$

En particulier $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

Inégalité des accroissements finis - simplifiée

- Si
- f est continue sur $[a, b]$ (*fermé*),
 - f est dérivable sur $]a, b[$ (*ouvert*),
 - $\exists k \geq 0$, tel que $\forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leq k$.

Alors, $\forall (x, y) \in ([a, b])^2$, $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$.