Couples et vecteurs de variables aléatoires

1 Lois conjointes et marginales

Loi conjointe : $\mathbf{P}\left((X,Y)=(x,y)\right)=\mathbf{P}\left(X=x \text{ et } Y=y\right).$

Lois marginales : « lois pour une seule variable. »

Loi conjointe $\overset{\Longrightarrow}{\not\Leftarrow}$ lois marginales : $\mathbf{P}_X(x)=\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbf{P}\left([X=x]\cap[Y=y]\right).$

(C'est la formule des probabilités totales.) $\mathbf{P}_Y(y)=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbf{P}\left([X=x]\cap[Y=y]\right).$

Loi image d'un couple : $$\mathbf{P}\left(u(X,Y)=t\right)=\sum_{\substack{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)\\ u(x,y)=t}}\mathbf{P}\left(X=x \text{ et } Y=y\right).$$

Loi de la somme : $$\mathbf{P}(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}\mathbf{P}\big([X=i]\cap[Y=k-i]\big).$$

Théorème de transfert : $$\mathbf{E}\left(u(X,Y)\right)=\sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)}u(x,y)\mathbf{P}(X=x,Y=y).$$

2 Covariance

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}\,(X,Y) &= \mathbf{E}\big[\,(X-\mathbf{E}(X))\ (Y-\mathbf{E}(Y))\,\big]\\
&= \mathbf{E}\,(XY)-\mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y) && \text{(Koenig-Huygens)}\\[1ex]
\mathbf{Cov}(X,Y) &= \mathbf{Cov}(Y,X) && \text{(symétrie)}\\
\mathbf{Cov}(aX+b,Y) &= a\,\mathbf{Cov}(X,Y)\\
\mathbf{Cov}(aX_1+X_2,Y) &= a\,\mathbf{Cov}(X_1,Y)+\mathbf{Cov}(X_2,Y) && \text{(linéarité)}\\
\mathbf{Cov}(X,X) &= \mathbf{V}(X)\geqslant 0. && \text{(positive)}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{V}(X+Y)=\mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(Y)+2\,\mathbf{Cov}(X,Y).$$

3 Coefficient de corrélation

$$\rho\,(X,Y)=\frac{\mathbf{Cov}\,(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y}\in[-1,1].$$

$\rho\,(X,Y)=1 \iff$ X et Y sont presque sûrement affinement liées positivement,

$\iff$ il existe $a>0$ et $b\in\mathbf{R}$ tels que $\mathbf{P}\,(X=aY+b)=1,$

$\iff$ $\mathbf{P}\,(Y^*=X^*)=1.$ (variables centrées réduites)

Pour un coefficient égal à -1, la relation est négative et $\mathbf{P}\,(Y^*=-X^*)=1.$
Pour $a>0$ et $c>0$, $\rho\,(aX+b\,,\,cY+d)=\rho\,(X,Y)\,.$
Le coefficient de corrélation est invariant par translations et changements d'échelles (strictement positifs).

4 Variables aléatoires indépendantes

Variables aléatoires indépendantes :

$$\forall (x,y)\in(X,Y)(\Omega),\quad \mathbf{P}\left([X=x]\cap[Y=y]\right)=\mathbf{P}(X=x)\mathbf{P}(Y=y).$$

Si X et Y sont indépendantes, alors

1. Pour tous les ensembles A et B, $\mathbf{P}(X\in A\,,\,Y\in B)=\mathbf{P}(X\in A)\mathbf{P}(Y\in B).$
2. Pour toutes les applications $f:E\to F$ et $g:E'\to F'$, $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
3. $\mathbf{E}(XY)=\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).$
4. $\mathbf{Cov}(X,Y)=0.$
5. $\mathbf{V}(X+Y)=\mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(Y).$

Deux **lois de Bernoulli** X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si les événements $[X_1=1]$ et $[X_2=1]$ sont indépendants.

5 Généralisation à n variables aléatoires

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ sont **mutuellement indépendantes** si,

pour tous les éléments $x_1,\,x_2,\cdots x_n$ $$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}X_i=x_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}\left(X_i=x_i\right).$$

- L'indépendance passe aux sous-familles.
- L'indépendante passe à l'image
  - $(u_1(X_1),u_2(X_2),\cdots,u_n(X_n))$ sont aussi mutuellement indépendantes.
  - $u(X_1,X_2,\cdots,X_p)$ et $v(X_{p+1},\cdots,X_n)$ sont aussi indépendantes.

Si les variables sont mutuellement indépendantes :

1. $\mathbf{E}(X_1\,X_2\cdots X_n)=\mathbf{E}(X_1)\,\mathbf{E}(X_2)\cdots\mathbf{E}(X_n).$
2. $\mathbf{V}(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\mathbf{V}(X_1)+\mathbf{V}(X_2)+\cdots+\mathbf{V}(X_n).$
3. Si $\forall i\in[\![1,n]\!], X_i\hookrightarrow\mathcal{B}(p)$, (même paramètre) alors $\sum_{i=1}^{n}X_i\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p).$
4. Si $X\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p)$ et $Y\hookrightarrow\mathcal{B}(m,p)$ (même paramètre p), alors $X+Y\hookrightarrow\mathcal{B}(n+m,p).$