Inégalités

1 Opérations algébriques sur les inégalités

$$\forall a \in \mathbf{R}, \qquad x < y \iff a+x < a+y$$

La multiplication par un nombre *strictement positif* conserve les inégalités larges et strictes :

$$\forall a > 0, \qquad x < y \iff ax < ay$$

La multiplication par un nombre *strictement négatif* change le sens des inégalités larges et strictes

$$\forall a < 0, \qquad x < y \iff ax > ay$$

Le passage à l'inverse de nombres *strictement de même signe*, change le sens des inégalités

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}_+^*, \qquad x < y \iff \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$$

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}_-^*, \qquad x < y \iff \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$$

- On peut ajouter membre à membre deux inégalités de même sens

  $$\big(x < y \quad \text{et} \quad x' \leqslant y'\big) \Rightarrow x + x' < y + y'$$

  Remarquer que l'inégalité stricte « gagne » pour la somme.

- On peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens **si tous les termes sont positifs**

  $$\big(0 \leqslant x < y \quad \text{et} \quad 0 < x' \leqslant y'\big) \Rightarrow xx' < yy'$$

  Remarquer que l'inégalité stricte « gagne » pour le produit, à condition de ne pas multiplier par 0.

Remarque : Lorsqu'une propriété est vraie pour des inégalités strictes, elle est aussi vraie pour des inégalités larges. La réciproque est fausse.

⚠ Les inégalités sont un des domaines qui demandent le plus de rigueur.
Quand on doit résoudre ou établir une inégalité, il ne faut **jamais** céder à l'intuition : « c'est évident » (qui se transforme souvent en « c'est faux »).
Il faut donc **toujours** se référer à ces quelques règles et à celles qui suivent à chaque étape du raisonnement.

2 Composition d'inégalités par des fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, et $f : I \to \mathbf{R}$ une application réelle.
On dit que f est **croissante** sur I, si

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

En français : « Une fonction croissante est une fonction qui conserve les inégalités larges par passage à l'image. »

On dit que f est **strictement croissante** sur I, si

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

En français : « Une fonction *strictement* croissante est une fonction qui conserve les inégalités *strictes* par passage à l'image. »

On dit que f est **décroissante** sur I, si

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$$

En français : « Une fonction croissante est une fonction qui inverse les inégalités larges par passage à l'image. »

On dit que f est **strictement décroissante** sur I, si

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

En français : « Une fonction *strictement* décroissante est une fonction qui inverse les inégalités *strictes* par passage à l'image. »
À retenir :

- Compose une inégalité par une fonction croissante préserve son sens.
- compose une inégalité par une fonction décroissante « échange » son sens.
- Pour obtenir des inégalités larges, il suffit d'une fonction (dé)croissante,
  pour des inégalités strictes, il faut la stricte (dé)croissance.
- Lorsque la monotonie est *stricte*, on peut passer à l'antécédent.
  Par exemple, $\ln(x) \leqslant \ln(y) \Rightarrow x \leqslant y$.

⚠ Vérifier la monotonie (croissance/décroissance) sur **tout** le domaine de validité de l'inégalité.
Par exemple $x \geqslant y \not\Rightarrow x^2 \geqslant y^2$ si les signes sont quelconques, car la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas croissante sur $\mathbf{R}$.

3 Inégalités sur les fonctions usuelles

Ces inégalités ne font pas partie du programme, mais les connaître constitue un avantage appréciable.
Il faut savoir les prouver.
Elle se démontrent facilement par l'étude des fonctions associées et s'interprètent avec la position de courbes par rapport à leur tangente.

Inégalité	**Domaine**
$\ln(1+x) \leqslant x$	$x > -1$
$\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$	$x \in \mathbf{R}$
$\tan x \geqslant x$	$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$
$\sin x \leqslant x$	$x \geqslant 0$

4 Comment trouver des inégalités

Différentes pistes pour trouver/prouver des inégalités :
Sera travaillé au cours de l'année : si tout n'est pas clair ici, ce n'est pas grave.

- Dépend d'un argument réel :
  - Étudier la fonction, trouver un maximum, ou comparer avec une tangente. (comme pour les inégalités usuelles plus haut)
  - Utiliser le théorème des bornes atteintes
    - pour une fonction continue sur un segment.
    - adapté pour des problèmes abstraits.
- Pour une somme :
  - majorer terme à terme.
  - utiliser l'inégalité triangulaire.
- Pour une suite (dépend d'un argument entier) :
  - utiliser la croissance ou décroissance,
  - conjecture + preuve par récurrence.
  - utiliser le caractère convergent.
    - toute suite convergente est bornée.
    - adapté pour des problèmes abstraits.