1 Variations de constantes

Il existe deux types de variations de constantes pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2, chacune répond à un problème différent.

- **1er cas : homogène.**
  Trouver une deuxième solution de l'équation homogène, pour obtenir une base des solutions (de l'équation homogène).
- **2ème cas : avec second membre.**
  Trouver une solution particulière, sachant que l'on dispose déjà des solutions de l'équation homogène.

A Obtenir les solutions de l'équation homogène.

Situation :

- On cherche les solutions de l'équation différentielle **homogène**
$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \qquad (E_0)$$
- les coefficients sont continus,
- on connaît déjà une solution non nulle de (E), que l'on note φ_1.

Méthode : variation de **LA** constante, que l'on nomme aussi parfois la méthode de *l'abaissement de l'ordre.*
On cherche une solution sous la forme $\varphi\ : x \mapsto \lambda(x)\varphi_1(x)$. avec φ deux fois dérivable.
En dérivant deux fois, on trouve alors, $\forall x \in I$,

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \lambda(x)\varphi_1(x).\\
\varphi'(x) &= \lambda'(x)\varphi_1(x) + \lambda(x)\varphi_1'(x).\\
\varphi''(x) &= \lambda''(x)\varphi_1(x) + 2\lambda'(x)\varphi_1'(x) + \lambda(x)\varphi_1''(x).
\end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation (E_0), on trouve

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi''(x) + a(x)\varphi'(x) + b(x)\varphi(x)\\
&= \lambda''(x)\varphi_1(x) + \lambda'(x)\left(2\varphi_1'(x) + a(x)\varphi_1(x)\right) + \lambda(x)\underbrace{\left(\varphi_1''(x) + a(x)\varphi_1'(x) + b(x)\varphi_1(x)\right)}_{=0 \text{ car } \varphi_1 \text{ solution de } (E_0)}.\\
&= \lambda''(x)\varphi_1(x) + \lambda'(x)\left(2\varphi_1'(x) + a(x)\varphi_1(x)\right).
\end{aligned}$$

On trouve donc à la fin une équation différentielle du premier ordre en λ', En effet, si on note $y = \lambda'$, alors y est solution de l'équation :

$$y'(x)\varphi_1(x) + y(x)\left(2\varphi_1'(x) + a(x)\varphi_1(x)\right) = 0.$$

On résout cette équation, avec le cours de première année, et on cherche ensuite une primitive pour trouver λ.
À la fin, **on n'oublie pas**, de multiplier λ par φ_1 pour obtenir la solution φ.

Limitiation de la méthode : si la solution homogène φ_1 s'annule sur I, alors l'équation d'ordre 1 en y n'est pas mise sous forme résolue et on ne peut diviser par φ_1 que en dehors de ses points d'annulation.
On est donc conduit à résoudre sur chaque intervalle où φ_1 ne s'annule pas, puis à raccorder les solutions.

B Obtenir une solution particulière

Situation :

- On cherche une solution particulière de l'équation différentielle **avec second membre**
$$y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x) \qquad (E)$$
- les coefficients sont continus,
- on connaît déjà une base des solutions de l'équation homogène (E_0) : φ_1, φ_2.

Méthode : variation **DES** constantes.
L'idée est ici de reprendre la même équation, mais sous forme matricielle pour se ramener à l'ordre 1.

1. *Traduction du problème en matriciel :*
   Si on note $U = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, alors, on peut écrire l'équation différentielle sous la forme
   $$U' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}.$$
   U est alors solution de l'équation différentielle
   $$U' = AU + B.$$
   On voit que cette mise sous forme matricielle est la même que pour les suites récurrentes linéaires, voir la fin du cours de calcul matriciel en MPSI : ***https://molin-mathematiques.fr/sources/cours161.php***
2. *Variation des constantes.*
   Maintenant on peut appliquer notre méthode de variation des constantes (qui ne fera plus qu'une seule constante *matricielle*).
   On cherche une solution sous la forme
   $$U = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2$$
   où $U_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_1' \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_2' \end{pmatrix}$.

On reconnaît un produit matriciel :

$$U = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = W\Lambda$$

où W est la matrice wronskienne (que l'on sait être inversible pour tout $x \in I$).

3. *On fait comme en MPSI à l'ordre 1 :*
   On veut que U soit solution de l'équation avec second membre, $U' = AU + B$, donc on calcule

$$U' - AU = W'\Lambda + W\Lambda' - AW\Lambda.$$

   Mais comme $W' = AW$ (car ce sont les solutions du système homgène), on obtient

$$U' - AU = W\Lambda'.$$

   U est solution de l'équation avec second membre si, et seulement si $U' - AU = B$, c'est-à-dire $W\Lambda' = B$.
   Ainsi, on obtient

$$\Lambda' = W^{-1}B.$$

   On connaît W qu'il est facile d'inverser, on connaît B ce qui donne donc λ_1' et λ_2' par simple calcul matriciel.
   Par une petite intégration, on trouve des valeurs admissibles pour λ_1 et λ_2 (on ne cherche qu'**une** solution particulière, donc une seule primitive suffit).
4. **On n'oublie pas** de multiplier $\varphi = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ pour obtenir une solution particulière qui convient.

La méthode paraît un peu longue quand on met tous les détails, mais le principe est simple :

1. On écrit sous forme matricielle pour être à l'ordre 1.
$$U' = AU + B.$$
2. On construit la matrice wronskienne (on met côte à côte les deux solutions de l'équation homogène (base) sous forme matricielle) : W.
3. On fait une variation de la constante comme à l'ordre 1 (multiplier par Λ du bon côté).
$$U = W\Lambda.$$
   ce qui donne comme à l'ordre 1 vu en sup
$$W\Lambda' = B.$$
4. On trouve Λ', puis Λ avec une primitive particulière, et on trouve alors notre solution $U = W\Lambda$.

Toutes les dernières étapes sont exactement les mêmes que l'ordre 1 vu en sup, en remplaçant y_0 solution de l'équation homogène par W.
Cette méthode se généralise sans problème aux équations d'ordre $\geqslant 2$.

2 À retenir

- On fait varier **1** constante, pour les solutions homogènes.
  Logique, car de toute façon, on n'a qu'une seule solution φ_1 dont on peut faire varier la constante.
- On fait varier **2** constantes, pour une solution particulière.
  Cela demande donc d'avoir déjà une base des solutions φ_1, φ_2 pour pouvoir faire varier deux constantes.

3 Trouver la permière solution homogène

Ces méthodes demandent d'avoir au moins une première solution de l'équation homogène.

1. coefficients constants : avec le cours, l'intuition, l'exponentielle matricielle.
2. coefficients continus : solutions polynomiales, DSE ou indication du sujet.

4 Pour s'entraîner

1. variation de la constante (abaissement de l'ordre) CCINP 32 en complétant par une question : donner une base des solutions de l'équation différentielle sur $]0, 1[$.
   On trouve alors
$$\varphi_2 : x \mapsto \frac{x}{(x-1)^2}\left(\ln(x) + \frac{1}{x}\right).$$
2. variation des constantes CCINP 31.