

# FRACTIONS RATIONNELLES

## A Définitions

**Forme irréductible :**  $F = \frac{P}{Q}$  tel que  $P \wedge Q = 1$  et  $Q$  unitaire.

**Degré :**  $\deg F = \deg P - \deg Q$ ,

$$\deg(F_1 + F_2) \leq \max(\deg F_1, \deg F_2), \quad \deg(F_1 F_2) = \deg F_1 + \deg F_2.$$

Pour  $F = \frac{P}{Q}$  sous forme irréductible.

- Les **pôles** de  $F$  sont les racines de  $Q$ .  
La **multiplicité du pôle** correspond à la multiplicité de la racine pour  $Q$ .
- Les **zéros** de  $F$  sont les racines de  $P$ .  
La **multiplicité du zéro** correspond à la multiplicité de la racine pour  $P$ .

## B Décomposition sur C

$$1. \text{ partie entière } E : \quad P = EQ + R \quad \Rightarrow \quad F = E + \frac{R}{Q} \quad \text{avec } \deg R < \deg Q.$$

$$2. \text{ Factoriser } Q : \quad Q = \lambda \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)^{m_i}.$$

$$3. \text{ Décomposer la partie fractionnaire : } \quad \frac{R}{Q} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j}.$$

4. Trouver les coefficients  $a_{i,j}$ .

### Méthode d'obtention des coefficients :

- Mise au même dénominateur (dernier recours)
- Pour le coefficient de plus grande puissance :

$$- \text{ (évaluation) } \quad a_m = \left( (X - \alpha)^m F \right) (\alpha),$$

$$- \text{ (dérivation) } \quad a_m = m! \frac{R(\alpha)}{Q^{(m)}(\alpha)}.$$

$$\text{Pour un pôle simple } a_1 = \frac{R(\alpha)}{Q'(\alpha)}.$$

On peut ensuite trouver les autres coefficients du même pôle de proche en proche en remarquant que pour  $P - \frac{a_m}{(X - \alpha)^m}$   $\alpha$  est un pôle de multiplicité inférieure ou égale à  $m - 1$ , ce qui permet donc de trouver  $a_{m-1}$ .

- Évaluation en  $\pm\infty$ , en  $\alpha$  qui n'est pas un pôle, utilisation de la parité de  $F, \dots$
- (*somme des résidus*) on pose  $s = \sum_{i=1}^n a_{i,1}$ ,
  - si  $\deg \frac{R}{Q} = -1$ , alors  $s$  est égal à la partie entière de  $\frac{XR}{Q}$  ;
  - si  $\deg \frac{R}{Q} < -1$ , alors  $s = 0$ .
- Utiliser la parité ou imparité de la fraction pour avoir des relations entre pôles.
- Si la fraction est dans  $\mathbf{R}(X)$ , alors ses pôles complexes sont conjugués et de même multiplicité.  
Pour  $\alpha$  pôle complexe de multiplicité  $m$ , on a alors les coefficients de  $\frac{1}{(X - \alpha)^k}$  et  $\frac{1}{(X - \bar{\alpha})^k}$  conjugués.
- **Pour les pôles de grande multiplicité** on peut utiliser la méthode des divisions euclidiennes successives (mais nécessite des mises au même dénominateur).

## C Décomposition sur R

$$1. \text{ partie entière } E : \quad P = EQ + R \quad \Rightarrow \quad F = E + \frac{R}{Q} \quad \text{avec } \deg R < \deg Q.$$

$$2. \text{ Factoriser } Q : \quad Q = \lambda \prod_{i=1}^q (X - \alpha_i)^{m_i} \prod_{i=1}^r (X^2 + \beta_i X + \gamma_i)^{\mu_i}.$$

3. Décomposer la partie fractionnaire :

$$\frac{R}{Q} = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{b_{i,j} X + c_{i,j}}{(X^2 + \beta_i X + \gamma_i)^j}.$$

4. Trouver les coefficients  $a_{i,j}$ , pour cela on peut

- utiliser des méthodes similaires à celles sur **C**,
- ne pas hésiter à évaluer le polynôme en des pôles complexes.