

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

⚠ Avant de diviser par un nombre, toujours vérifier qu'il est **non nul** !

Situation 1 : ordre 1

Exemple : $ax + b = cx + d$

On sait résoudre depuis la 4ème...
Il y a soit 0 solution, soit une, soit tous les nombres sont solution.

Situation 2 : Un produit égal à zéro

Un produit est nul si est seulement si un de ses facteurs est nul.

Exemple : $(5x + 3)(2x + 7)(3x^2 - 8) = 0$

Ici, on résout $5x + 3 = 0$, $2x + 7 = 0$ et $3x^2 - 8 = 0$
Le nombre de solutions dépend du nombre de facteurs et du nombre de solutions pour chaque facteur.

Situation 3 : Factorisable

Si x_1 est solution d'une équation polynomiale, alors on peut factoriser par $(x - x_1)$.
→ Commencer par chercher les solutions « évidentes ».

Exemple : $x^4 - 7x^3 + 12x^2 + 4x - 16 = 0$

-1 est racine évidente, on factorise donc par $(x + 1)$.
 $(x + 1)(x^3 - 8x^2 + 20x - 16)$
2 est racine évidente du facteur de degré 3, on factorise par $(x - 2)$
 $(x + 1)(x - 2)(x^2 - 6x + 8)$

Qui se factorise à nouveau :
 $(x + 1)(x - 2)^2(x - 4)$

Donc $S = \{-1, 2, 4\}$

👉 Penser aux identités remarquables :

$$\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \\ a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \end{cases}$$

Situation 4 : Un changement de variable

Exemple : $5(2x + 1)^2 - 8 = 0$

Ici on pose $y = (2x + 1)$ et on résout l'équation en fonction de y : $5y^2 - 8 = 0$
On trouve deux solutions y_1 et y_2
On en déduit les valeurs possible pour x en résolvant $2x + 1 = y_1$ et $2x + 1 = y_2$

C'est cette méthode qui est à la base des formules pour résoudre les équations de degré 2 avec la mise sous forme canonique.

Situation 5 : Équation du second degré.

Équation du type : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

S'il n'y a pas de racines évidentes, utiliser les formules du cours :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si $\Delta > 0$
Deux solutions dans \mathbf{R}

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ou

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta = 0$
solution double dans \mathbf{R}

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Si $\Delta < 0$
Aucune solution dans \mathbf{R}

Deux solutions dans \mathbf{C}

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

ou

$$x_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

x_1, x_2 complexes conjuguées

Situation 6 : quotients, racines...

Exemple : $\sqrt{x(x - 3)} = \sqrt{3x - 5}$

On peut raisonner par analyse-synthèse.
Analyse : Si x est solution, alors $x(x - 3) = 3x - 5$
Donc $x^2 - 6x + 5 = 0$, donc $S \subset \{1, 5\}$.
Synthèse : On vérifie que les racines sont dans le domaine de définition. Ici, seul $x = 5$ convient.
Donc $S = \{5\}$

Situation 7 : Les autres situations...

C'est là que ça devient intéressant.
Ne pas hésiter à considérer la fonction « égale à 0 » et faire son étude.

Inéquations

Les inéquations se résolvent comme les équations...

MAIS • Lorsque l'on multiplie ou divise par un nombre **négatif** on change le sens de l'inégalité.

Par exemple, pour $-3x < 2$, si on divise par -3 , cela donne $x > -\frac{2}{3}$

• Lorsque l'on compose par une **fonction décroissante**, on change le signe de l'inégalité.

• Lorsque l'on compose par une **fonction croissante**, on conserve le signe de l'inégalité.