Ensembles

Égalité d'ensembles	$E=F$	E et F ont exactement les mêmes éléments. $E=F \iff \forall x \ \big(x\in E \iff x\in F\big)$
Inclusion	$E\subset F$	Tous les éléments de E appartiennent à F. on dit que E **est inclus dans** F, ou que F **contient** E, ou que E est **une partie** de F $E\subset F \iff \forall x \ \big(x\in E \Rightarrow x\in F\big)$
Parties d'un ensemble	$\mathcal{P}(E)$	Les ensembles inclus dans E. $A\in\mathcal{P}(E) \iff A\subset E$
Réunion	$E\cup F$	Éléments de E et de F mis ensemble $E\cup F=\{x \text{ tel que } x\in E \textbf{ ou } x\in F\}$
Intersection	$E\cap F$	Éléments appartenant **à la fois** à E et à F $E\cap F=\{x \text{ tel que } x\in E \textbf{ et } x\in F\}$
Ensembles disjoints	$E\cap F=\emptyset$	E et F n'ont aucun élément commun.
Complémentaire	$\complement_E F$ ou $E\setminus F$ ou $\overline{F}$	Complémentaire de F dans E, Éléments de E n'appartenant pas à F. $\complement_E F=\{x\in E \text{ tel que } x\notin F\}$
Partition de E		$\bigcup_{i\in I} A_i=E$, $\forall (i,j)\in I^2,\ i\neq j \Rightarrow A_i\cap A_j=\emptyset$, $\forall i\in I,\ A_i=\emptyset$.
Produit cartésien	$E\times F$	Ensemble des **couples** $E\times F=\big\{(x,y) \text{ tel que } x\in E, y\in F\big\}$
	E^2	$=E\times E$.
		se généralise à n ensembles.
n-uplet		Élément de $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n=\prod_{i=1}^{n} E_i$
p-liste		Élément de E^n. (cas particulier de p-uplet)
Famille	$(x_i)_{i\in I}$	Suite d'éléments indexés par I (I est l'ensemble des **indices**) Si $I=[\![1;p]\!]$, on retrouve les p-listes.
	E^I	Ensemble des familles de E indexées par I.

Méthodes

Prouver qu'un ensemble est vide :
Supposer $x\in A$ et aboutir à une contradiction.

Prouver une inclusion :
Pour montrer $A\subset B$ on montre que tous les éléments de A sont aussi dans B.
Concrètement, on prend x *quelconque* dans A et on montre que $x\in B$.

Prouver une égalité par double inclusion :

$$E=F \iff \big(E\subset F \textbf{ et } F\subset E\big).$$

Propriétés

Involutivité du complémentaire : $\overline{\overline{A}}=A$.

Distributivité :

$$\big(A_1\cup A_2\big)\cap B=\big(A_1\cap B\big)\cup\big(A_2\cap B\big)$$
$$\big(A_1\cap A_2\big)\cup B=\big(A_1\cup B\big)\cap\big(A_2\cup B\big)$$

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)\cap B=\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B)$$
$$\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)\cup B=\bigcap_{i\in I}(A_i\cup B)$$

Formules de De Morgan :

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B} \quad\text{et}\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$
$$\overline{\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)}=\bigcap_{i\in I}\overline{A_i} \quad\text{et}\quad \overline{\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)}=\bigcup_{i\in I}\overline{A_i}.$$

Langage probabiliste vs ensembliste

Langage probabiliste	Notation	langage ensembliste
univers	Ω	ensemble
événement élémentaire issue épreuve	$\omega\in\Omega$	élément
événement	$A\subset\Omega$	partie de Ω
A est réalisé	$\omega\in A$	ω est élément de A, appartenance
A implique B	$A\subset B$	A est inclus dans B
A ou B	$A\cup B$	réunion
A et B	$A\cap B$	intersection
contraire de A	$\overline{A}$	complémentaire
événements incompatibles	$A\cap B=\emptyset$	ensembles disjoints
famille complète d'événements	$\longrightarrow$	$\approx$ partition (voir remarque dans le cours)