Nombres réels

1 Ensembles de nombres

N les entier naturels $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, ...$

Z les entier relatifs $...,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2, ...$

Q les rationnels (quotients de deux entiers) $\frac{1}{4},\ \frac{2}{825},\ -\frac{5}{3},\ 3,5 = \frac{35}{10},\ ...$

R les réels $0,\ 5,\ -4,\ \frac{2}{3},\ -\frac{3}{7},\ \pi, ...$

C les complexes $3+2i,\ 5i,\ -2\sqrt{3}(1+i),\ 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}, \cdots$

- Une **étoile** en exposant si l'ensemble est privé de l'élément 0 : $\mathbf{N}^* = \{n \geqslant 1\}$
- Un « **plus** » en exposant ou en indice pour les positifs : $\mathbf{R}_+ = \mathbf{R}^+ = [0, +\infty[$, $\mathbf{Z}^+ = \mathbf{N}$, $\mathbf{R}_+^* =]0, +\infty[$.
- Un « **moins** » pour les nombres négatifs (ou nuls) : $\mathbf{R}_- =]-\infty, 0]$.

2 Relations binaires

Une relation binaire sur E est une partie $G \subset \mathcal{P}(E \times E)$.

$$\forall (x,\, y) \in E^2,\ x\mathscr{R}y \iff (x,\, y) \in G.$$

- $\mathscr{R}$ est **réflexive** si $\forall x \in E,\ x\mathscr{R}x$.
- $\mathscr{R}$ est **symétrique** si $\forall (x,\, y) \in E^2,\ x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x$.
- $\mathscr{R}$ est **antisymétrique** si $\forall (x,\, y) \in E^2,\ (x\mathscr{R}y \wedge y\mathscr{R}x) \Rightarrow x = y$.
- $\mathscr{R}$ est **transitive** si $\forall (x,\, y,\, z) \in E^3,\ (x\mathscr{R}y \wedge y\mathscr{R}z) \Rightarrow x\mathscr{R}z$.

x et y de E sont **comparables** suivant $\mathscr{R}$ si $x\mathscr{R}y$ ou $y\mathscr{R}x$.
Relation **totale** : tous les éléments de E sont comparables, sinon relation **partielle.**

relation d'équivalence :
- réflexive,
- symétrique,
- transitive.

classes d'équivalence :

$$\mathrm{cl}(x) = \dot{x} = \{y \in E,\ x\mathscr{R}y\}.$$

L'ensemble des classes d'équivalence forme une partition de E.

relation d'ordre :
- réflexive,
- **anti**symétrique,
- transitive.

Relation d'ordre **stricte** $\prec$
$\forall (x,\, y) \in E^2$,

$$x \prec y \iff (x \preccurlyeq y \wedge x \neq y).$$

- **majorant** M de A $\quad \forall x \in A,\ x \preccurlyeq M$.
- **minorant** m de A $\quad \forall x \in A,\ m \preccurlyeq x$.
- M est le **plus grand élément** de A si $\quad M \in A,$ et $\forall x \in A,\ x \preccurlyeq M$.
- M est le **plus petit élément** de A si $\quad m \in A,$ et $\forall x \in A,\ m \preccurlyeq x$.
- **borne supérieure** : plus petit majorant (s'il existe)
- **borne inférieure** : plus grand minorant (s'il existe).

Caractérisation de la borne supérieure sur R
Soit A une partie non vide majorée de $\mathbf{R}$,
A admet une borne supérieure et

$$S = \sup A \iff S \text{ est un majorant de } A \text{ et } \forall \epsilon > 0,\ [S-\epsilon,\ S] \cap A \neq \emptyset.$$

ou, de façon équivalente :

$$S = \sup A \iff S \text{ est un majorant de } A \text{ et } \forall \epsilon > 0,\ \exists x \in A,\ S - \epsilon \leqslant x.$$

3 Valeur absolue et partie entière

Parties positives et négatives : $x^+ = \max(x,\, 0)$ et $x^- = \max(-x,\, 0)$.
$\forall x \in \mathbf{R},\ x = x^+ - x^-$.

Valeur absolue : $|x| = \max\{x, -x\} = x^+ + x^-$.
$|xy| = |x|\,|y|, \quad |x^n| = |x|^n$.

Inégalité triangulaire

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \qquad \Big|\,|x| - |y|\,\Big| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \qquad \Big|\,|x| - |y|\,\Big| \leqslant |x-y| \leqslant |x| + |y|.$$

Partie entière : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1,$ ou $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbf{Z}, n \leqslant x\}$.
La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbf{R}$.