Nombres complexes

Forme cartésienne	Forme trigonométrique	Forme polaire
$z = x + iy, \quad \text{avec } (x,y) \in \mathbf{R}^2$	$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$	$z = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$
avec $x = \mathfrak{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ $y = \mathfrak{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$	avec $\rho \geqslant 0,\ \theta \in]-\pi,\pi]$	$\rho \geqslant 0,\ \theta \in]-\pi,\pi]$
$\overline{z} = x - iy$	$\overline{z} = \rho(\cos\theta + i\sin(-\theta))$	$\overline{z} = \rho\,\mathrm{e}^{-i\theta}$
$\lvert z\rvert = \sqrt{x^2+y^2}$ et $z\,\overline{z} = \lvert z\rvert^2$	$\lvert z\rvert = \rho$ et $\arg(z) = \theta$	$\lvert z\rvert = \rho$ et $\arg(z) = \theta$

- Présence de sommes $\Rightarrow$ forme cartésienne
  (exception : utilisation de la technique de l'angle moyen)
- Présence de produits et puissances $\Rightarrow$ forme polaire

Mettre sous forme trigonométrique ou exponentielle $(z \neq 0)$

$$z = a + ib \longrightarrow \rho = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$\longrightarrow$ recherche θ tel que $\cos\theta = \dfrac{a}{\rho}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{\rho}$.

si $a > 0$, $\quad \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \pmod{2\pi}$,

si $a > 0$, $\quad \theta = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \pmod{2\pi}$.

Conjugué

(*involutivité*) $\quad \overline{\overline{z}} = z\,.$

(*règles de calcul*) $\quad \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ et $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}\,.$

$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \overline{\lambda z} = \lambda\overline{z}\,.$

Module

$|zz'| = |z|\,|z'|$ et $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

Inégalité triangulaire

$$\big|\,|z| - |z'|\,\big| \leqslant |z - z'| \leqslant |z| + |z'|$$

égalité ssi $\exists\lambda \in \mathbf{R}_+$, $z = \lambda z'$ ou $z' = \lambda z$.
(colinéaires de même sens)

Argument

$\arg(-z) = \arg(z) + \pi \pmod{2\pi}$.
$\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$.
pour $\lambda > 0$, $\quad \arg(\lambda z) = \arg(z)$.

Interprétations géométriques

	Vecteurs	Points
Affixe :	affixe de $\overrightarrow{u}$: z_1 affixe de $\overrightarrow{v}$: z_2	affixe de $\overrightarrow{AB}$: $z_B - z_A$
Distance :	$\lvert\overrightarrow{u}\rvert = \lvert z_1\rvert$	$AB = \lvert z_B - z_A\rvert$
Angle :	$\arg(z)$	$\arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right) = \arg z_B - \arg z_A = \widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}$
Alignement :	z_1 et z_2 colinéaires $\iff \exists\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $z_1 = \lambda z_2$ ou $z_2 = \lambda z_1$ $\iff z_1\overline{z_2} \in \mathbf{R}$ $\iff \arg(z_2) = \arg(z_1)\ [\pi]$	A, B, C (distincts) alignés $\iff \overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ $\iff \begin{cases} z_B - z_A = \lambda(z_C - z_A) \\ \text{ou} \quad z_C - z_A = \lambda(z_B - z_A) \end{cases}$ $\iff (z_B - z_A)\,(\overline{z_C - z_A}) \in \mathbf{R}$ $\iff \arg(z_B - z_A) = \arg(z_C - z_A)\ [\pi]$ $\iff \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbf{R}^*$

Méthodes : $z \in \mathbf{R} \iff z = \overline{z}$ou $\mathfrak{Im}(z) = 0$.
$z \in i\mathbf{R} \iff z = -\overline{z}$ou $\mathfrak{Re}(z) = 0$.
$z = 0 \iff \mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Im}(z) = 0$ou $|z| = 0$.

Racine carrée complexe : $\delta^2 = (x+iy)^2 = a + ib$ si et seulement si

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} & \text{car } \left|\delta^2\right| = |\Delta| \\ x^2 - y^2 = a & \text{car } \mathfrak{Re}(\delta^2) = a \\ 2xy = b & \text{car } \mathfrak{Im}(\delta^2) = b \end{cases}$$

Racine n-ièmes de l'unité :

$$\mathbf{U}_n = \left\{\xi_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}.$$