Équations différentielles linéaires

$$\boxed{\text{Solutions} \quad = \quad \text{Solutions homogènes} \quad « + » \quad \text{solution particulière.}}$$

1 Ordre 1 à coefficient constant

$$y' + ay = b(t).$$

Solutions de l'équation homogène :

$$\mathscr{S}_0 = \left\{t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-at},\ \lambda \in \mathbf{K}\right\}.$$

Solution particulière :

- **Second membre constant**
  - Si $a \neq 0$ $\quad t \mapsto \frac{b}{a}$ convient.
  - Si $a = 0$ $\quad t \mapsto bt$ convient.
- **Polynôme - exponentielle**

  $$b(t) = P(t)\, \mathrm{e}^{\gamma t} \text{ avec } P \in \mathbf{K}[X].$$

  - si $\gamma \neq -a$, on cherche une solution sous la forme
    $$t \mapsto Q(t)\, \mathrm{e}^{\gamma t} \text{ avec } Q \in \mathbf{K}[X] \text{ et } \deg Q = \deg P.$$
  - si $\gamma = -a$, on cherche une solution sous la forme
    $$t \mapsto t\, Q(t)\, \mathrm{e}^{\gamma t} \text{ avec } Q \in \mathbf{K}[X] \text{ et } \deg Q = \deg P.$$
- **Fonction trigonométrique**
  Passer par les complexes et utiliser la méthode précédente.
- **Autre second membre : variation de la constante.**
  On écrit la solution sous la forme

  $$f : t \mapsto \lambda(t)\, \mathrm{e}^{-at} \text{ avec } \lambda \text{ dérivable.}$$

  - On « injecte » cette solution dans l'équation différentielle (sans oublier de dériver λ),
  - on en déduit la valeur de $\lambda'(t)$,
  - on trouve $\lambda(t)$ en intégrant (à une constante près).

2 Ordre 1 à coefficient continu

$$y' + a(t)y = b(t).$$

Solutions de l'équation homogène sur un intervalle :
On note A une primitive de a sur I.

$$\mathscr{S}_0 = \left\{t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-A(t)},\ \lambda \in \mathbf{K}\right\}.$$

Solution particulière : Utiliser la méthode de la variation de la constante.

3 Ordre 2 à coefficient constant

$$ay'' + by' + cy = d(t) \qquad \text{avec } a \neq 0.$$

On pose l'équation caractéristique : $ax^2 + bx + c = 0$ de discriminant Δ.

- **Si** $\Delta \neq 0$
  r_1 et r_2 : racines (distinctes) de l'équation caractéristique.
  $$\mathscr{S}_0 = \left\{t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu\, \mathrm{e}^{r_2 t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2\right\}.$$
- **Si** $\Delta = 0$
  r : racine double de l'équation caractéristique.
  $$\mathscr{S}_0 = \left\{t \mapsto (\lambda + t\mu)\, \mathrm{e}^{rt},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2\right\}.$$
- **Si** $\Delta < 0$, on obtient les solutions **réelles** avec
  r_1 et r_2 : racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique. $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.
  $$\mathscr{S}_0 = \left\{t \mapsto (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t))\, \mathrm{e}^{\alpha t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

Solution particulière si $d(t) = P(t)\, \mathrm{e}^{\gamma t}$ avec $P \in \mathbf{K}[X]$ et $\gamma \in \mathbf{K}$.

- si γ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche sous la forme $t \mapsto Q(t)\, \mathrm{e}^{\gamma t}$ avec $\deg Q = \deg P$.
- si γ est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche sous la forme $t \mapsto t\, Q(t)\, \mathrm{e}^{\gamma t}$ avec $\deg Q = \deg P$.
- si γ est racine double de l'équation caractéristique, on cherche sous la forme $t \mapsto t^2\, Q(t)\, \mathrm{e}^{\gamma t}$ avec $\deg Q = \deg P$.