Comparaison asymptotique de suites

Définitions

1. **Négligeable :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.
   $u_n = o(v_n)$.
   $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$.
2. **Équivalentes :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.
   $u_n \sim v_n$.
   $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - v_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$.
   $$u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n) \iff u_n - v_n = o(u_n).$$
3. **Dominée :** $\frac{u_n}{v_n}$ borné.
   $u_n = O(v_n)$.
   $\exists K > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant K |v_n|$.
   $$u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n) \quad \text{et} \quad u_n \sim v_n \Rightarrow u_n = O(v_n).$$

Transitivité : les trois relations sont transitives.

L'équivalence :

1. $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Deux suites équivalentes sont de même signe (strict) à partir d'un certain rang.
3. Deux suites équivalentes ont le même comportement asymptotique : elles sont de même nature et si l'une admet une limite finie ou infinie, alors l'autre possède la même limite.

Opérations sur les équivalents :

1. On peut **multiplier** les équivalents :
   $$\begin{array}{lll} \text{si} \quad u_n \sim v_n \text{ et } u'_n \sim v'_n & \text{alors,} & u_n u'_n \sim v_n v'_n. \\ \text{si} \quad u_n \sim v_n \text{ et } \lambda \in \mathbf{R} & \text{alors,} & \lambda u_n \sim \lambda v_n. \\ \text{si} \quad u_n \sim v_n \text{ et } \alpha \in \mathbf{R} & \text{alors,} & u_n^\alpha \sim v_n^\alpha. \end{array}$$
2. Si $u_n \sim v_n$ alors leurs suites extraites sont aussi équivalentes.
3. On ne peut **pas** additionner des équivalents,
4. On ne peut **pas** composer les équivalents avec une fonction.

Opérations sur les « o » :

Les opérations sont les mêmes pour les petits « o » et les grands « O ».

1. *Combinaisons linéaires :*
   Si $u_n = o(v_n)$ et $u'_n = o(v_n)$, alors $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, $\lambda u_n + \mu u'_n = o(v_n)$.
2. *Produit :*
   Si $u_n = o(v_n)$ et $u'_n = o(v'_n)$, alors $u_n u'_n = o(v_n v'_n)$.
3. *Produit par une même suite :*
   Si $u_n = o(v_n)$, et $(a_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ (ne s'annule pas à partir d'un certain rang), alors $a_n u_n = o(a_n v_n)$.
4. *Passage à la puissance :*
   Si $u_n = o(v_n)$ et $\alpha > 0$, alors $u_n^\alpha = o(v_n^\alpha)$.
5. *Suites extraites :*
   Si $u_n = o(v_n)$ et φ une fonction d'extraction, alors $u_{\varphi(n)} = o(v_{\varphi(n)})$.

Croissances comparées :

(On peut remplacer n par toute suite qui tend vers $+\infty$.)

Soient $\alpha, \beta, \gamma, a, b$ des réels

1. Si $\alpha < \beta$ alors $n^\alpha = o(n^\beta)$,
2. Si $|a| < |b|$, alors $a^n = o(b^n)$,
3. Si $\beta > 0$, alors $\ln^\alpha(n) = o(n^\beta)$,
4. Si $a > 1$, alors $n^\beta = o(a^n)$.
5. $a^n = o(n!)$.

Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $a > 1$, $\quad \left(\ln^\beta n\right) \ll (n^\alpha) \ll (a^n) \ll (n!)$.

Équivalents usuels :

Si $u_n \to 0$,

$$\begin{array}{ccc} e^{u_n} - 1 \sim u_n & \sin u_n \sim u_n & \mathrm{sh}\,(u_n) \sim u_n \\ \ln(1+u_n) \sim u_n & \cos u_n - 1 \sim -\dfrac{u_n^2}{2} & \mathrm{ch}\,(u_n) - 1 \sim \dfrac{u_n^2}{2} \\ \sqrt{1+u_n} - 1 \sim \dfrac{u_n}{2} & \tan u_n \sim u_n & \mathrm{th}\,(u_n) \sim u_n \\ (1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n & \mathrm{Arctan}\, u_n \sim u_n & \end{array}$$

avec $\alpha \neq 0$.

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}.$$