Polynômes

1 Formules

Newton : $(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$.

Bernoulli : $P^{n+1} - Q^{n+1} = (P-Q) \sum_{k=0}^{n} P^k Q^{n-k}$.

Leibniz : $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$.

Taylor : $P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\widetilde{P^{(k)}}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k = \sum_{k=0}^{d} \frac{\widetilde{P^{(k)}}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$ avec $d = \deg P$.

Degrés : $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$,
(inégalité stricte ssi $\deg P = \deg Q$ avec coefficients dominants opposés).
$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$,
$\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q$ pour Q non constant.

Polynômes associés : P et Q sont **associés** sur $\mathbf{K}$
si, et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbf{K}^*$ tel que $P = \lambda Q$,
si, et seulement si $P|Q$ et $Q|P$.

2 Arithmétique

PGCD : Pour A et B non tous les deux nuls

- D est un plus grand diviseur commun à A et B
si, et seulement si D est un diviseur commun à A et B et si tout diviseur commun à A et B divise également D,
si, et seulement si D est un diviseur commun à A et B de degré maximal.
- Tous les plus grands diviseurs communs à A et B sont associés entre eux.
- Le dernier reste dans l'algorithme d'Euclide donne *un* plus grand diviseur commun.
- Il existe un unique diviseur commun unitaire que l'on nomme PGCD et que l'on note $A \wedge B$.

PPCM :

- M est un plus petit multiple commun à A et B
si, et seulement si M est un multiple commun à A et B et si tout multiple commun à A et B est multiple de M,
si, et seulement si M est un multiple commun à A et B de degré entier minimal ($M = 0$ si A ou B nul).
- Tous les plus petits multiples communs à A et B sont associés entre eux.
- Il existe un unique plus petit multiple commun unitaire ou nul que l'on nomme PPCM et que l'on note $A \vee B$.

Division euclidienne :

$$\forall (A,B) \in \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X] \setminus \{0\},\ \exists! (Q,R) \in (\mathbf{K}[X])^2 \text{ tel que } A = BQ + R \text{ et } \deg R < \deg B.$$

Théorème de Bezout :

$$A \wedge B = 1 \iff \exists (U,V) \in (\mathbf{K}[X])^2,\ AU + BV = 1.$$

Lemme de Gauss : pour $(A,B,C) \in (\mathbf{K}[X] \setminus \{0\})^3$.

$$\text{Si } A|BC \text{ et } A \wedge C = 1, \text{ alors } A|B.$$

$$\text{Si } A|C,\ B|C \text{ et si } A \wedge B = 1, \text{ alors } AB|C.$$

3 Racines et décomposition

Décomposition en produit d'irréductibles Tout polynôme non nul de $\mathbf{K}[X]$ s'écrit de manière unique (à l'ordre près) comme produit d'irréductibles unitaires et d'une constante.

$$P = \lambda \prod_{i=0}^{k} Q_i$$

Avec $\lambda \in \mathbf{K}^*$ et les Q_i sont des polynômes irréductibles unitaires.
Racines et factorisation :

$$P(\alpha) = 0 \text{ si, et seulement si } \widetilde{P}(\alpha) = 0.$$

Multiplicité d'une racine : α est racine racine de P de multiplicité m
si, et seulement si $\widetilde{P}(\alpha) = \widetilde{P'}(\alpha) = ... = \widetilde{P^{(m-1)}}(\alpha) = 0$ et $\widetilde{P^{(m)}}(\alpha) \neq 0$.
si, et seulement si $(X-\alpha)^m | P$ et $(X-\alpha)^{m+1} \nmid P$.

→ Le nombre de racines (comptées avec leur multiplicité) d'un polynôme non nul est inférieur ou égal à son degré.
→ Seul le polynôme nul admet une infinité de racines.

Théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme est scindé sur $\mathbf{C}$.

Autre formulation : Tout polynôme non constant admet au moins une racine sur $\mathbf{C}$.
Autre formulation : Les seuls polynômes irréductibles sur $\mathbf{C}$ sont les polynômes de degré 1.

4 Polynômes interpolateurs de Lagrange

Soient $n \in \mathbf{N}$, $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ deux à deux **distincts**.

$$\forall j \in [\![1,\, n]\!],\ \exists! L_j \in \mathbf{K}_{n-1}[X],\ \text{ tel que } \forall i \in [\![1,\, n]\!],\ L_j(x_i) = \delta_{i,\, j}.$$

L_j est le j-ième **polynôme interpolateur de Lagrange.**

$$L_j = \prod_{i \neq j} \frac{X - x_i}{x_j - x_i}.$$

- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} L_j = 1.$
- $\forall (y_1,\, y_2,\, \cdots,\, y_n) \in \mathbf{K}^n$, $\exists! P \in \mathbf{K}_{n-1}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1,\, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$.

  $$P = \sum_{j=1}^{n} y_j L_j.$$

  Si on n'impose pas $P \in \mathbf{K}_{n-1}[X]$, alors il existe une infinité de polynômes solution donnés par : $P = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j L_j + Q \prod\limits_{j=1}^{n} (X - x_j)$, pour Q décrivant $\mathbf{K}[X]$.
- Tout polynôme $P \in \mathbf{K}_{n-1}[X]$ se décompose de façon unique comme *combinaison linéaire* des L_j.

  $$\forall P \in \mathbf{K}_{n-1}[X],\ \exists! (\alpha_1,\, \alpha_2,\, \cdots,\, \alpha_n) \in \mathbf{K}^n,\ P = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j L_j.$$

5 Polynômes à coefficients réels

La division euclidienne, la relation de divisibilité, les PPCM, PGCD sont invariants par changement de corps (les relations trouvées sur $\mathbf{C}$ sont valables sur $\mathbf{R}$).
Si α est racine de P, alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P avec la *même multiplicité.*
Les polynômes irréductibles sur $\mathbf{R}$ sont

- les polynômes de degré 1,
- les polynômes de degré 2 à discriminant négatif.

6 Relations coefficients-racines

Soit P un polynôme scindé sur $\mathbf{K}$.

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$$

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=1}^{n} \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

7 Méthodes

Montrer qu'un polynôme est nul : au choix

1. montrer que tous ses coefficients sont nuls,
2. montrer qu'il admet une infinité de racines,
3. montrer qu'il admet plus de racines que son degré,
4. montrer que son degré ne peut être un nombre entier.

Montrer que deux polynômes sont égaux : la différence est nulle.

Résolution d'équations polynomiales :

- Raisonner avec les degrés (polynôme nul à part).
- Raisonner avec les valuations.
- Utiliser le coefficient dominant.
- Utiliser les racines de part et d'autre de l'égalité.
  Travailler sur $\mathbf{C}$ quitte à revenir sur $\mathbf{R}$ ensuite (pour les solutions réelles ; si α est racine, alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine).
- Résoudre avec les outils d'analyse (par exemple équation différentielle) et chercher les polynômes parmi les solutions.
- ...