Limites et continuité

1 Définition des limites avec les quantificateurs

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$: $\forall M > 0,\ \exists x_0 > 0,\ \forall x \in I,\ x \geqslant x_0 \Rightarrow f(x) \geqslant M.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 > 0,\ \forall x \in I,\ x \geqslant x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$: $\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \geqslant M.$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$

Soit $a \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$

1) Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.
2) Si f admet une limite finie non nulle en a alors f est du même signe que sa limite au voisinage de a.

2 Continuité

f est **continue** en a

- si et seulement si $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.
- si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \eta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

3 Propriétés séquentielles

Soit $(a,b) \in (\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\})^2$. Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$ et $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$, alors $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$.

En particulier, si f continue en $a \in I$. $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n \to +\infty} u_n\right) = f(a)$.

4 À gauche ou à droite

- Limite en a : le point a **est compris** dans les valeurs atteintes si f est définie en a.
- Limite à gauche, à droite de a : le point a **n'est pas compris** dans les valeurs possibles (même si f est définie en a).

  $\rightarrow$ f peut avoir une limite à gauche et une limite à droite, égales, sans avoir de limite en a (si $f(a)$ est différent de cette limite commune).
- Continuité en a : le point a **est compris** dans les valeurs atteintes.
- Continuité à gauche et à droite de a : le point a **est compris** dans les valeurs atteintes.

  $\rightarrow$ si f est continue à droite et à gauche, alors f est continue au point.

5 Théorèmes

f, φ, ψ désignent des applications définies sur I et $a \in \overline{I}$.

Stabilité des inégalités larges

On suppose que :
- $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant \psi(x)$,
- f et ψ admettent des limites en a.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} \psi(x)$.

Théorème d'encadrement ou des gendarmes

On suppose que :
- $\forall x \in I, \varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$,
- φ et ψ admettent une limite finie commune ℓ en a.

Conclusion : f admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Théorème de minoration – *théorème majoration pour $-\infty$ (en majorant).*

On suppose que :
- $\forall x \in I, \varphi(x) \leqslant f(x)$,
- $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = +\infty$.

Conclusion : f admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Théorème de la limite monotone – simplifié

On suppose que :
- $I =]\alpha, \beta[$ un intervalle **ouvert**,
- f est **croissante** sur I.

Conclusion : f admet des limites en α et en β (éventuellement infinies).

Théorème de la limite monotone – complet

On suppose que :
- $I =]\alpha, \beta[$ un intervalle **ouvert**,
- f est **croissante** sur I.

Conclusion :
1) f admet une limite à gauche et à droite en tout point de I,
2) $\forall a \in I, \quad \lim\limits_{x\to a-} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim\limits_{x\to a+} f(x)$.
3) Si $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} f(x) = \ell$ alors f est continue en a et $f(a) = \ell$.
4) f admet une limite en α : $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \inf\limits_{x\in I} f(x) \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$.
5) f admet une limite en β : $\lim\limits_{x\to\beta} f(x) = \sup\limits_{x\in I} f(x) \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.

Théorème des valeurs intermédiaires

3 formulations équivalentes :

- Si f est continue sur un intervalle I contenant $[a, b]$, alors f prend toutes les valeurs situées entre $f(a)$ et $f(b)$.
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- Si f est continue sur un intervalle I tel qu'il existe $(a, b) \in I$, avec $f(a)f(b) \leqslant 0$ (de signes contraires), alors f s'annule entre a et b.

Théorème des bornes atteintes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes (elle possède un maximum et un minimum.)

Autre formulation : L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Théorème de la bijection continue

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I alors

- $f(I) = J$ est un intervalle,
- f est un bijective de I sur $f(I)$,
- f^{-1} est également bijective, continue et de même monotonie que f.

Continuité et injectivité

Si f est continue et injective sur un intervalle I alors f est strictement monotone sur I.