Applications linéaires

- **Application linéaire** $f : E \to F$

$$\forall(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2,\ \ \forall(u,v) \in E^2,\ f\left(\lambda u + \mu v\right) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

  $\to$ traduit un rapport de proportionnalité.
  Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $f\left(0_E\right) = 0_F$.

- **Endomorphisme** de E : E dans E.
- **Morphisme identité** de E : $\mathrm{Id}_E : x \mapsto x \in \mathcal{L}(E)$.
- **Isomorphisme :** application linéaire bijective.
- **Automorphisme :** endomorphisme bijectif

$(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Composition, réciproque :

- La composée de deux applications linéaires est linéaire.
- La réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.
- $\mathrm{GL}(E)$ est stable par composition,
- si $f \in \mathrm{GL}(E)$, alors $f^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$

Image de f : $\mathrm{Im}\,(f) = \left\{f(u),\ u \in E\right\}$.
Noyau de f $\mathrm{Ker}\,(f) = f^{-1}\left(\{0_F\}\right) = \left\{u \in E, f(u) = 0_F\right\}$.

- $\mathrm{Im}\,(f)$ est un sous espace vectoriel de F.
- $\mathrm{Ker}\,(f)$ est un sous espace vectoriel de E.
- L'image d'un sous-espace vectoriel par f est un espace vectoriel.
- L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel par f est un espace vectoriel.

Injection :

- f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_E\}$.
- La composée de deux injections est une injection.

Surjection :

- f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\,(f) = F$.
- La composée de deux surjections est une surjection.

Binôme de Newton et formule de Bernoulli : Si f et g **commutent**, alors

$$\forall n \in \mathbf{N},\ (f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k} g^k \qquad \text{(Binôme de Newton)}$$

$$f^{n+1} - g^{n+1} = (f-g)\sum_{k=0}^{n} f^k g^{n-k} = (f-g)\sum_{k=0}^{n} f^{n-k} g^k \qquad \text{(Formule de Bernoulli)}$$