Dérivabilité

1 Définition

- f est **dérivable** en a
  - si son taux d'accroissement admet une limite finie en a.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

  - *ou* si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a :

$$\exists \lambda \in \mathbf{R},\ \forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \lambda(x-a) + (x-a)\,\varepsilon_a(x)$$

  avec ε_a une fonction définie sur I telle que $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_a(x) = 0$.
  Dans ce cas, $\lambda = f'(a)$.

- f est **dérivable à gauche** en a
  - si son taux d'accroissement admet une limite finie à gauche a.
  - *ou* si f admet un **développement limité à l'ordre 1** à gauche en a.

$$\boxed{\text{Dérivable à gauche + dérivable à droite} \Rightarrow \big(\text{dérivable au point ssi } f'_g(a) = f'_d(a)\big)\,.}$$

- **Tangente :** $T(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$.

2 Classes de fonctions

Dérivée k-ième : On note $f^{(k)}(a)$ la dérivée k-ième de f en a, et on pose $f^{(0)} = f$.

$f \in \mathcal{D}^k(I)$, si f admet une dérivée k-ième en tout point de I.

$f \in \mathcal{C}^k(I)$, si f admet des dérivées k-ième sur I et si celles-ci sont continues.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

$f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ si f est de classe $\mathcal{C}^k(I)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

$f \in \mathcal{C}^0(I)$ si f est de continue sur I.

Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ de I à valeurs dans J on note aussi $f \in \mathcal{C}^k(I, J)$.

3 Théorèmes

$(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$.

Extremum et point critique

Soit f définie sur I et dérivable en $a \in I$ **qui n'est pas une borne** de I.
Si f admet un extremum **local** en a, alors $f'(a) = 0$.

Théorème de Rolle

Si
- f est continue sur $[a, b]$ (*fermé*),
- f est dérivable sur $]a, b[$ (*ouvert*),
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ (ouvert) tel que $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis

Si
- f est continue sur $[a, b]$ (*fermé*),
- f est dérivable sur $]a, b[$ (*ouvert*).

Alors il existe $c \in]a, b[$ (ouvert) tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.