Ensembles

Égalité d'ensembles	$E=F$	E et F ont exactement les mêmes éléments. $E=F \iff \forall x \quad \big(x\in E \iff x\in F\big)$
Inclusion	$E\subset F$	Tous les éléments de E appartiennent à F. on dit que E **est inclus dans** F, ou que F **contient** E, ou que E est **une partie** de F $E\subset F \iff \forall x \quad \big(x\in E \Rightarrow x\in F\big)$
Parties d'un ensemble	$\mathcal{P}(E)$	Les ensembles inclus dans E. $A\in\mathcal{P}(E) \iff A\subset E$
Réunion	$E\cup F$	Éléments de E et de F mis ensemble $E\cup F=\{x \text{ tel que } x\in E \textbf{ ou } x\in F\}$
Intersection	$E\cap F$	Éléments appartenant **à la fois** à E et à F $E\cap F=\{x \text{ tel que } x\in E \textbf{ et } x\in F\}$
Ensembles disjoints	$E\cap F=\emptyset$	E et F n'ont aucun élément commun.
Complémentaire	$\complement_E F$ ou $E\setminus F$ ou $\overline{F}$	Complémentaire de F dans E, Éléments de E n'appartenant pas à F. $\complement_E F=\{x\in E \text{ tel que } x\notin F\}$
Produit cartésien	$E\times F$	Ensemble des **couples** $E\times F=\big\{(x,y) \text{ tel que } x\in E, y\in F\big\}$
	E^2	$=E\times E$.
		se généralise à n ensembles.
n-uplet		Élément de $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n=\prod_{i=1}^{n} E_i$
p-liste		Élément de E^n. (cas particulier de p-uplet)
Famille	$(x_i)_{i\in I}$	Suite d'éléments indexés par I (I est l'ensemble des **indices**) Si $I=[\![1;p]\!]$, on retrouve les p-listes.
	E^I	Ensemble des familles de E indexées par I.

1 Méthodes

Prouver une inclusion :
Pour montrer $A\subset B$ on montre que tous les éléments de A sont aussi dans B.
Concrètement, on prend x *quelconque* dans A et on montre que $x\in B$.

Prouver une égalité par double inclusion :

$$E=F \iff \big(E\subset F \textbf{ et } F\subset E\big)$$

2 Ensembles de nombres

- **N** les entier naturels $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,...$
- **Z** les entier relatifs $...,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,...$
- **Q** les rationnels (quotients de deux entiers) $\frac14,\ \frac{2}{825},\ -\frac53,\ 3,5=\frac{35}{10},\ ...$
- **R** les réels $0,\ 5,\ -4,\ \frac23,\ -\frac37,\ \pi,...$
- **C** les complexes $3+2i,\ 5i,\ -2\sqrt3(1+i),\ 2\,e^{i\frac{\pi}{6}},\cdots$

- Une **étoile** en exposant si l'ensemble est privé de l'élément 0 : $\mathbf{N}^*=\{n\geqslant 1\}$
- Un « **plus** » en exposant ou en indice pour les positifs : $\mathbf{R}_+=\mathbf{R}^+=[0,+\infty[$, $\mathbf{Z}^+=\mathbf{N}$, $\mathbf{R}_+^*=]0,+\infty[$.
- Un « **moins** » pour les nombres négatifs (ou nuls) : $\mathbf{R}_-=]-\infty,0]$.

3 Propriétés

Involutivité du complémentaire : $\overline{\overline{A}}=A$

Distributivité :

$$\big(A_1\cup A_2\big)\cap B=\big(A_1\cap B\big)\cup\big(A_2\cap B\big)$$
$$\big(A_1\cap A_2\big)\cup B=\big(A_1\cup B\big)\cap\big(A_2\cup B\big)$$

$$\Big(\bigcup_{i\in I}A_i\Big)\cap B=\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B)$$
$$\Big(\bigcap_{i\in I}A_i\Big)\cup B=\bigcap_{i\in I}(A_i\cup B)$$

Formules de De Morgan :

$$\complement_E\big(A\cup B\big)=\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B} \quad \text{et} \quad \complement_E\big(A\cap B\big)=\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$
$$\complement_E\Big(\bigcup_{i\in I}A_i\Big)=\bigcap_{i\in I}\complement_E A_i \quad \text{et} \quad \complement_E\Big(\bigcap_{i\in I}A_i\Big)=\bigcup_{i\in I}\complement_E A_i$$

4 Correspondance avec le langage ensembliste

Langage probabiliste	Notation	langage ensembliste
univers	Ω	ensemble
événement élémentaire issue épreuve	$\omega \in \Omega$	élément
événement	$A \subset \Omega$	partie de Ω
A est réalisé	$\omega \in A$	ω est élément de A, appartenance
A implique B	$A \subset B$	A est inclus dans B
A ou B	$A \cup B$	réunion
A et B	$A \cap B$	intersection
contraire de A	$\overline{A}$	complémentaire
événements incompatibles	$A \cap B = \emptyset$	ensembles disjoints
famille complète d'événements	$\longrightarrow$	$\approx$ partition (voir remarque dans le cours)