Espaces vectoriels

Sous-espace vectoriel : $F \subset E$ est un **sous espace vectoriel** de E si

1. F contient 0_E (non vide)
2. F est stable par combinaison linéaire : $\forall (u,v) \in F^2,\ \ \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad u + \lambda v \in F$.

Sous-espace vectoriel engendré par $u_1, u_2, u_3, \cdots u_n$, Vect E) :
Ensemble des combinaisons linéaires des u_i.

$$\text{Vect}\,(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \{\lambda_1\, u_1 + \lambda_2\, u_2 + \cdots \lambda_n\, u_n,\ \text{ pour } (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n\}$$

Opérations sur les espaces vectoriels :

- Intersection : OK.
  Toute intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel.
- Union : Attention.
  En général l'union de deux espaces vectoriels **n'est pas** un espace vectoriel.

Familles finies de vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_n \in E$.

- **Libre :** aucun vecteurs ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.
  Les vecteurs sont *linéairement indépendants.*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = 0\,.$$

- **Liée :** (contraire de libre) un vecteur est combinaison linéaire des autres.

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n \text{ non tous nuls, tel que} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E\,.$$

- **Génératrice de** F : tout vecteur de F peut se décomposer dans la famille.

$$\forall u \in F,\ \exists (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n,\ u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\,.$$

- **Base de** F : libre + génératrice.

Libre	**Génératrice de** F	**Base de** F
unicité de la décomposition	existence de la décomposition	existence & unicité
retire un vecteur $\rightarrow$ reste libre	ajoute un vecteur $\rightarrow$ reste génératrice	- -

Compléter une famille libre :
Si $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est une famille libre de E et $y \in E$,
alors la famille complétée $(u_1, u_2, \cdots, u_n, y)$ est libre si et seulement si

$$y \notin \text{Vect}\ (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\,.$$

Dimension finie

E est supposé être un espace vectoriel de dimension finie.

$$\text{rg}\,(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \dim\,(\text{Vect}\ (u_1, u_2, \cdots, u_n))\,.$$

Famille de vecteurs de $\mathbf{R}^n$	**Matrice des vecteurs colonne**
rang de la famille	nombre de pivots.
libre	autant de pivots que de **colonnes**.
génératrice de $\mathbf{R}^n$	autant de pivots que de **lignes**.
base de $\mathbf{R}^n$	autant de pivots que de **ligne** et de **colonnes**.

Famille libre $\xrightarrow[\text{ajoute des vecteurs}]{}$ **Base** $\xleftarrow[\text{retire des vecteurs}]{\text{Th. base extraite}}$ **Famille génératrice**

Base = famille libre maximale = famille génératrice minimale

Théorème de la base extraite
De toute famille génératrice finie d'un **R**-espace vectoriel (non réduit à 0), on peut extraire une base de E.

Caractérisation des bases
Si $\dim(E) = n \geqslant 1$, et $\mathcal{F}$ une famille de n **vecteurs** de E,
alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{F}$ est une base de E,
2. $\mathcal{F}$ est génératrice de E,
3. $\mathcal{F}$ est libre.

Sous-espaces vectoriels
Si F est un sous espace vectoriel de E,

$$F \subset E \Rightarrow \dim F \leqslant \dim E.$$

et $\dim E = \dim F \iff E = F$.