

ESPACES VECTORIELS

Sous-espace vectoriel : $F \subset E$ est un **sous espace vectoriel** de E si

- F contient 0_E (non vide)
- F est stable par combinaison linéaire : $\forall (u, v) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbf{R}, u + \lambda v \in F$.

Sous-espace vectoriel engendré par $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \text{Vect } E$:

Ensemble des combinaisons linéaires des u_i .

$$\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n, \text{ pour } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n\}$$

Opérations sur les espaces vectoriels :

- Intersection : OK.
Toute intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel.
- Union : Attention.
En général l'union de deux espaces vectoriels **n'est pas** un espace vectoriel.

Familles finies de vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_n \in E$.

- **Libre :** aucun vecteurs ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.
Les vecteurs sont *linéairement indépendants*.

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0.$$

- **Liée :** (contraire de libre) un vecteur est combinaison linéaire des autres.

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n \text{ non tous nuls, tel que } \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0_E.$$

- **Génératrice de F :** tout vecteur de F peut se décomposer dans la famille.

$$\forall u \in F, \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n, u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i.$$

- **Base de F :** libre + génératrice.

Libre	Génératrice de F	Base de F
unicité de la décomposition	existence de la décomposition	existence & unicité
retire un vecteur → reste libre	ajoute un vecteur → reste génératrice	-

Compléter une famille libre :

Si (u_1, u_2, \dots, u_n) est une famille libre de E et $y \in E$, alors la famille complétée $(u_1, u_2, \dots, u_n, y)$ est libre si et seulement si

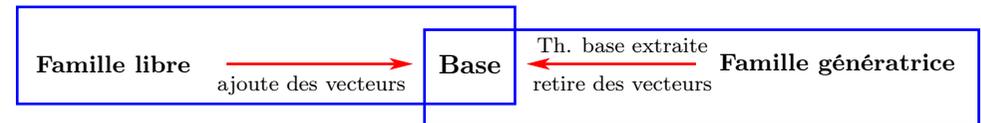
$$y \notin \text{Vect}(u_i)_{1 \leq i \leq n}.$$

DIMENSION FINIE

E est supposé être un espace vectoriel de dimension finie.

$$\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \dim(\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)).$$

Famille de vecteurs de \mathbf{R}^n	Matrice des vecteurs colonne
rang de la famille	nombre de pivots.
libre	autant de pivots que de colonnes .
génératrice de \mathbf{R}^n	autant de pivots que de lignes .
base de \mathbf{R}^n	autant de pivots que de ligne et de colonnes .



Base = famille libre maximale = famille génératrice minimale

Théorème de la base extraite

De toute famille génératrice finie d'un \mathbf{R} -espace vectoriel (non réduit à 0), on peut extraire une base de E .

Caractérisation des bases

Si $\dim(E) = n \geq 1$, et \mathcal{F} une famille de n **vecteurs** de E , alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- \mathcal{F} est une base de E ,
- \mathcal{F} est génératrice de E ,
- \mathcal{F} est libre.

Sous-espaces vectoriels

Si F est un sous espace vectoriel de E ,

$$F \subset E \Rightarrow \dim F \leq \dim E.$$

et $\dim E = \dim F \iff E = F$.