Probabilités finies

1 Événements

- **Univers** = ensemble non vide (fini dans ce chapitre). Notation : Ω.
- **Événement** = partie de Ω. Notation : $\mathcal{E}$ est l'ensemble des événements.
- **Événement élémentaire** (ou **issue possible**) = événement **singleton**.
- $(A_i)_{i\in\ I}$ est une **famille complète d'événements**, si

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega, \qquad \text{et} \qquad \forall (i,j)\in I^2,\ \text{ si } i\neq j \text{ alors } A_i\cap A_j=\emptyset\,.$$

Opérations sur les événements :

- « A ou B » = « $A\cup B$ »,
- « A et B » = « $A\cap B$ »,
- « contraire de A » = « $\overline{A}$ ».
- « $A\cap B=\emptyset$ » = « A et B **incompatibles** ».

2 Probabilité

Une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω fini, est une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathbf{R}$ telle que

1. $\forall A\in\mathcal{E},\ 0\leqslant \mathbf{P}(A)\leqslant 1$,
2. $\mathbf{P}(\Omega)=1$,
3. Si $A\cap B=\emptyset$, alors $\mathbf{P}(A\cup B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)$.

Dans ce cas :

4. $\mathbf{P}(\emptyset)=0$.
5. Si $A\subset B$, alors $\mathbf{P}(A)\leqslant \mathbf{P}(B)$. (croissance)
6. $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)=1-\mathbf{P}(A)$.
7. $\boxed{\mathbf{P}(A\cup B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A\cap B)}$. (formule du crible)
8. $\mathbf{P}\left(\bigcup_{0\leqslant i\leqslant n} A_i\right)\leqslant \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i)$.

$$\boxed{(\Omega,\mathcal{E},\mathbf{P}) \text{ est un } \textbf{espace probabilisé fini.}}$$

- Si $\mathbf{P}(A)=0$, alors l'événement A est **négligeable**.
- Si $\mathbf{P}(A)=1$, alors l'événement A est **presque certain**.

Description par les événements élémentaires :

$\forall i\in[\![1,n]\!],\quad p_i\geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$. Dans ce cas : $\mathbf{P}(A)=\sum_{\omega_i\in A} p_i$.

Modèle équiprobable : $\forall i\in[\![1,n]\!],\ p_i=\frac{1}{n}\qquad \mathbf{P}(A)=\frac{\mathrm{Card}\,(A)}{\mathrm{Card}\,(\Omega)}$.

3 Probabilités conditionnelles

Probabilité conditionnelle de B sachant A (pour $\mathbf{P}(A)\neq 0$)

$$\boxed{\mathbf{P}(B|A)=\mathbf{P}_A(B)=\frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A)}}$$

Si $P(A)\neq 0$ et $\mathbf{P}(B)\neq 0$

$$\boxed{\mathbf{P}_A(B)=\frac{\mathbf{P}_B(A)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}}$$

4 Indépendance

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont } \textbf{indépendants} &\iff \mathbf{P}(A\cap B)=\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)\,.\\ &\iff \mathbf{P}_A(B)=\mathbf{P}(B)(\text{si } \mathbf{P}(A)\neq 0)\,.\end{aligned}$$

$(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont **mutuellement indépendants**, si **pour toute partie** J de $[\![1;n]\!]$

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right)=\prod_{i\in J}\mathbf{P}(A_i)\,.$$

⚠ $\mathbf{P}(A\cap B\cap C)=\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(C) \quad \not\Rightarrow \quad A, B, C$ mutuellement indépendants.

5 Trois formules

Formule des probabilités composées

$$\boxed{\mathbf{P}(A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n)=\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbf{P}_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n)}$$

Formule des probabilités totales

Si $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille complète d'événements de probabilités non nulles

$$\boxed{\mathbf{P}(A)=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_{B_i}(A)\mathbf{P}(B_i)}$$

Formule de Bayes

Soit A un événement de $(\Omega,\mathbf{P})$, et $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille complète d'événements,
Si $\mathbf{P}(A)>0$, alors

$$\boxed{\mathbf{P}_A(B_k)=\frac{\mathbf{P}_{B_k}(A)\mathbf{P}(B_k)}{\mathbf{P}(A)}=\frac{\mathbf{P}_{B_k}(A)\mathbf{P}(B_k)}{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_{B_i}(A)\mathbf{P}(B_i)}}$$