Suites réelles

Produit convergent :
Si (u_n) est bornée et si (ε_n) tend vers 0, alors $(u_n \varepsilon_n)$ tend vers 0.

Signe d'une suite convergente :
Si $u_n \to \ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

Théorème de la limite monotone :
Si (u_n) est une suite monotone, alors (u_n) admet une limite finie ou infinie.

Théorème d'encadrement / théorème des gendarmes :
Si (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ, et si $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$, alors (w_n) est convergente de limite ℓ.

Théorème de minoration :
Si $u_n \to +\infty$ et si $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant v_n$, alors $v_n \to +\infty$.

Passage des inégalités à la limite :

- Si (u_n) et (v_n) convergent et si $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
- Si (u_n) converge et $\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant a$.
- Si (u_n) converge et $\forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant a$.

Suites adjacentes
u et v sont **adjacentes**, si l'une est croissante, l'autre décroissante et si $u - v \to 0$.

$\boxed{\text{Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.}}$

Suites extraites : $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ avec $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante.
Si $u_n \to \ell \in \overline{\mathbf{R}}$ alors $u_{\varphi(n)} \to \ell$.

Théorème de Bolzano-Weierstrass :

Toute suite bornée admet une suite extraite convergente.

Composition avec une application :
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Suites arithmético-géométrique

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = a u_n + b \quad a \neq 1.$$

- Recherche du point fixe ℓ tel que $\ell = a\ell + b$.
- $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison a.

Croissances comparées Si $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbf{R}$, $a > 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^\beta n}{n^\alpha} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Vérification préalable :

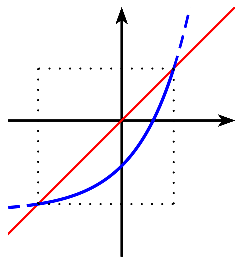
- Domaine de définition de f,
- Vérification que u_n est défini pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Stabilité d'un domaine : On cherche A stable par f le plus petit possible contentant tous les termes.

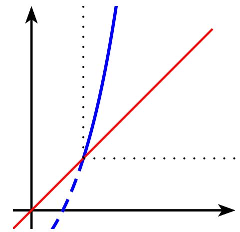
Si f est continue : utiliser la notion de point fixe.
permet de prouver la non convergence ou la valeur de la limite, mais ne prouve pas la convergence.

Monotonie de la suite par comparaison avec x : Étude des positions relatives de $f(x)$ et x.
$\to$ On cherche une partie A stable par f, sur laquelle

$y = f(x)$ est **au dessus** de $y = x$.
$\to$ suite croissante.



$y = f(x)$ est **en dessous** de $y = x$.
$\to$ suite décroissante.



$\to$ *Théorème de la limite monotone*

Monotonie de la suite par variations de f :

Si f est croissante sur A	Si f est décroissante sur A	
(u_n) est monotone *Théorème de la limite monotone*	(u_{2n}) et (u_{2n+1}) monotones de sens contraire	
	Si $u_{2n+1} - u_{2n} \to 0$	Cas général
$\to (u_n)$ admet une limite $u_n \to \ell \in \mathbf{R}$ ou $u_n \to \pm\infty$	suites adjacentes	*Th. limite monotone*
Si A **est bornée,** $\to (u_n)$ converge vers $\ell \in \mathbf{R}$.	$\exists \ell \in \mathbf{R}$, tel que $u_{2n} \to \ell$, et $u_{2n+1} \to \ell$. Alors, $u_n \to \ell$.	**Si** A est bornée $\to (u_{2n})$ et (u_{2n+1}) convergent.
Si (u_n) converge et **Si** f est continue, alors $u_n \to \ell$ un point fixe de f avec $f(\ell) = \ell$.		**Si** f est continue, alors $u_{2n} \to \ell_1$ point fixe de $f \circ f$. $u_{2n+1} \to \ell_2$ point fixe de $f \circ f$. **Si** $\ell_1 = \ell_2$ alors $u_n \to \ell_1$.