

1 ENSEMBLES FINIS

Parties d'un ensemble E fini :

Si $A \subset E$, alors A fini et $\text{Card } A \leq \text{Card } E$.
De plus, $(\text{Card } A = \text{Card } E) \iff A = E$.

méthode : Égalité entre deux ensembles.
On montre une inclusion et qu'ils sont de même cardinal.

Complémentaire d'une partie dans un ensemble E fini :

Si $A \subset E$, alors $\bar{A} = E \setminus A$ fini et

$$\text{Card } \bar{A} = \text{Card } (E \setminus A) = \text{Card } E - \text{Card } A.$$

méthode : passer par le complémentaire pour des dénombrements de type « au moins ».

Cardinal d'une réunion :

Si A et B sont des ensembles finis, alors $A \cup B$ est un ensemble fini et

$$\text{Card } (A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } (A \cap B).$$

Cardinal d'une produit cartésien :

Si A et B sont des ensembles finis, alors

$$\text{Card } (A \times B) = \text{Card } A \times \text{Card } B.$$

Si $(A_i)_{i \in [1, n]}$ sont des ensembles finis, alors

$$\text{Card } \left(\prod_{i=1}^n A_i \right) = \prod_{i=1}^n \text{Card } A_i.$$

2 APPLICATIONS

Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \rightarrow F$.

1. Si f est injective alors $\text{Card } E \leq \text{Card } F$.
2. Si f est surjective alors $\text{Card } E \geq \text{Card } F$.
3. Si f est bijective alors $\text{Card } E = \text{Card } F$.

Si de plus, $\text{Card } E = \text{Card } F$ alors

$$f \text{ est injective } \iff f \text{ est surjective } \iff f \text{ est bijective.}$$

3 COMBINATOIRE

On note $\text{Card } E = p$ et $\text{Card } F = n$.

p-uplets – applications $E \rightarrow F$ (tirage avec ordre et remise)

$$\text{Card } (F^p) = (\text{Card } F)^p = n^p = \text{Card } (F^E).$$

p-arrangements – injections $E \rightarrow F$ (tirage avec ordre et sans remise)

$$\text{si } n \leq p, \text{ alors } A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

permutations – bijections $E \rightarrow F$

(réordonner les éléments, tirage exhaustif avec ordre et sans remise)

$$\text{si } n = p : n!.$$

parties (ou p-combinaisons) (tirage sans ordre ni remise, ou simultané)

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Valeurs à retenir : $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{1} = n$ $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

		Avec répétition	
		OUI	NON
Liste ordonnée	OUI	p -listes	p -arrangements
	NON	$(p$ -suites)	p -combinaisons

Somme ou produit ?

- **Somme = disjonction des cas**

C'est une union disjointe. Chaque « sous-dénombrement » correspond à des tirages complets.

- **Produit = décomposition du tirage**

On décompose chaque tirage. Les « sous-dénombrement » correspondent chacun à une partie du tirage total.