Variables aléatoires finies

1 Fonction de probabilité

$\mathbf{P}(X=x) \;=\; \mathbf{P}\left(X^{-1}(\{x\})\right) \;=\; \mathbf{P}(\{\omega,\ \text{tel que } X(\omega)=x\})$

$\mathbf{P}(X\in A) \;=\; \mathbf{P}\left(X^{-1}(A)\right) \;=\; \mathbf{P}(\{\omega,\ \text{tel que } X(\omega)\in A\}) = \sum_{x\in A}\mathbf{P}(X=x)$

$\{[X=x]\,,\ x\in X(\Omega)\}$ forme un **système complet d'événements** de Ω.

2 Espérance

$$\mathbf{E}(X)=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\})=\sum_{x\in X(\Omega)}x\mathbf{P}(X=x)$$

$$\mathbf{E}\left(u(X)\right)=\sum_{x\in X(\Omega)}u(x)\mathbf{P}(X=x) \qquad \text{(Théorème de transfert)}$$

1) $\forall(a,b)\in\mathbf{R}^2,\ \mathbf{E}(aX+bY)=a\mathbf{E}(X)+b\mathbf{E}(Y)$ (linéarité)
2) Si $\exists a\in\mathbf{R},\ \forall\omega\in\Omega,\ X(\omega)=a,$ alors $\mathbf{E}(X)=a.$
3) $\left|\mathbf{E}(X)\right|\leqslant\mathbf{E}\left(\left|X\right|\right)$ (inégalité triangulaire)
4) si $X\geqslant 0,$ alors $\mathbf{E}(X)\geqslant 0$ (positivité)
5) si $X\leqslant Y,$ alors $\mathbf{E}(X)\leqslant\mathbf{E}(Y)$ (croissance)

Moment d'ordre k de X : $\mathbf{E}\left(X^k\right)=\sum_{x\in X(\Omega)}x^k\mathbf{P}(X=x)$

3 Variance

$$\mathbf{V}(X)=\mathbf{E}\left(\left(X-\mathbf{E}(X)\right)^2\right)=\mathbf{E}\left(X^2\right)-\left(\mathbf{E}(X)\right)^2 \qquad \text{(Koenig-Huygens)}$$

1) $\mathbf{V}(aX+b)=a^2\,\mathbf{V}(X)a\,.$
2) $\mathbf{V}(X)\geqslant 0.$
3) $\mathbf{V}(X)=0 \iff (\exists\, a\in X(\Omega),\ \mathbf{P}\left(X=a\right)=1) \iff X=\mathbf{E}(X).$

4 Écart type

$$\sigma_X=\sigma(X)=\sqrt{\mathbf{V}(X)}$$

Variable aléatoire centrée réduite : $X^*=\dfrac{X-\mathbf{E}(X)}{\sigma_X}\,.$

5 Inégalités

Inégalité de Markov :
Si $X\geqslant 0$ et $a>0,$

$$\boxed{\mathbf{P}(X\geqslant a)\leqslant\frac{\mathbf{E}(X)}{a}\,.}$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\left|X-\mathbf{E}(X)\right|\geqslant a\right)\leqslant\frac{\sigma_X^2}{a^2}\,.}$$

Loi		**Exemple type**	$X(\Omega)$		$\mathbf{E}(X)$	σ_X
Loi certaine		situation déterministe	$\{m\}$	$\mathbf{P}(X=m)=1$	m	0
Loi uniforme	$\mathscr{U}\left([\![1,n]\!]\right)$	lancer d'un dé équilibré	$[\![1,n]\!]$	$\mathbf{P}(X=k)=\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$
Loi de Bernoulli	$\mathscr{B}(p),\ p\in]0,1[$	tirage à deux issues	$\{0,1\}$	$\mathbf{P}(X=1)=p$	p	$\sqrt{pq}$
Loi binomiale	$\mathscr{B}(n,p),\ p\in]0,1[$	tirage avec remise	$[\![0,\,n]\!]$	$\mathbf{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k\left(1-p\right)^{n-k}$	np	$\sqrt{npq}$

Couples et vecteurs de variables aléatoires

6 Lois conjointes et marginales

Loi conjointe : $\mathbf{P}((X,Y)=(x,y)) = \mathbf{P}(X=x \text{ et } Y=y)$.

Lois marginales : « lois pour une seule variable. »

Loi conjointe $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ lois marginales :

$$\mathbf{P}_X(x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbf{P}([X=x]\cap[Y=y]).$$

(C'est la formule des probabilités totales.)

$$\mathbf{P}_Y(y) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbf{P}([X=x]\cap[Y=y]).$$

Loi image d'un couple :

$$\mathbf{P}(u(X,Y)=t) = \sum_{\substack{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)\\ u(x,y)=t}} \mathbf{P}(X=x \text{ et } Y=y).$$

Loi de la somme :

$$\mathbf{P}(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}\big([X=i]\cap[Y=k-i]\big).$$

Théorème de transfert :

$$\mathbf{E}(u(X,Y)) = \sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)} u(x,y)\mathbf{P}(X=x, Y=y).$$

7 Covariance

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}(X,Y) &= \mathbf{E}\big[(X-\mathbf{E}(X))\,(Y-\mathbf{E}(Y))\big] \\
&= \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y) && \text{(Koenig-Huygens)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}(X,Y) &= \mathbf{Cov}(Y,X) && \text{(symétrie)}\\
\mathbf{Cov}(aX+b,Y) &= a\,\mathbf{Cov}(X,Y) &&\\
\mathbf{Cov}(aX_1+X_2,Y) &= a\,\mathbf{Cov}(X_1,Y)+\mathbf{Cov}(X_2,Y) && \text{(linéarité)}\\
\mathbf{Cov}(X,X) &= \mathbf{V}(X)\geqslant 0. && \text{(positive)}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(Y)+2\,\mathbf{Cov}(X,Y).$$

8 Variables aléatoires indépendantes

Variables aléatoires indépendantes :

$$\forall (x,y)\in(X,Y)(\Omega),\quad \mathbf{P}([X=x]\cap[Y=y]) = \mathbf{P}(X=x)\mathbf{P}(Y=y).$$

Si X et Y sont indépendantes, alors

1) Pour tous les ensembles A et B, $\mathbf{P}(X\in A\,,\,Y\in B) = \mathbf{P}(X\in A)\mathbf{P}(Y\in B)$.
2) Pour toutes les applications $f:E\to F$ et $g:E'\to F'$, $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
3) $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$.
4) $\mathbf{Cov}(X,Y) = 0$.
5) $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(Y)$.

Remarque : deux **variables de Bernoulli** X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si les événements $[X_1=1]$ et $[X_2=1]$ sont indépendants.

9 Généralisation à n variables aléatoires

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ sont **mutuellement indépendantes** si,

pour tous les éléments $x_1,\, x_2, \cdots x_n$ $$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i=x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}(X_i=x_i).$$

Si les variables sont mutuellement indépendantes :

1) $\mathbf{E}(X_1\,X_2\cdots X_n) = \mathbf{E}(X_1)\,\mathbf{E}(X_2)\cdots\mathbf{E}(X_n)$.
2) $\mathbf{V}(X_1+X_2+\cdots+X_n) = \mathbf{V}(X_1)+\mathbf{V}(X_2)+\cdots+\mathbf{V}(X_n)$.
3) Si $\forall i\in[\![1,n]\!], X_i\hookrightarrow\mathscr{B}(p)$, (même paramètre) alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$.
4) Si $X\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$ et $Y\hookrightarrow\mathscr{B}(m,p)$ (même paramètre p), alors $X+Y\hookrightarrow\mathscr{B}(n+m,p)$.