Variables aléatoires finies

1 Fonction de probabilité

$\mathbf{P}(X=x) = \mathbf{P}\left(X^{-1}(\{x\})\right) = \mathbf{P}(\{\omega,\ \text{tel que } X(\omega)=x\})$

$\mathbf{P}(X\in A) = \mathbf{P}\left(X^{-1}(A)\right) = \mathbf{P}(\{\omega,\ \text{tel que } X(\omega)\in A\}) = \sum_{x\in A}\mathbf{P}(X=x)$

$\{[X=x],\ x\in X(\Omega)\}$ forme un **système complet d'événements** de Ω.

2 Espérance

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\}) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X=x)$$

$$\mathbf{E}\left(u(X)\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} u(x)\mathbf{P}(X=x) \qquad \text{(Théorème de transfert)}$$

1) $\forall(a,b)\in\mathbf{R}^2,\ \mathbf{E}(aX+bY) = a\mathbf{E}(X)+b\mathbf{E}(Y)$ (linéarité)

2) Si $\exists a\in\mathbf{R},\ \forall\omega\in\Omega,\ X(\omega)=a,$ alors $\mathbf{E}(X)=a$.

3) $\left|\mathbf{E}(X)\right| \leqslant \mathbf{E}\left(\left|X\right|\right)$ (inégalité triangulaire)

4) si $X\geqslant 0$, alors $\mathbf{E}(X)\geqslant 0$ (positivité)

5) si $X\leqslant Y$, alors $\mathbf{E}(X)\leqslant\mathbf{E}(Y)$ (croissance)

Moment d'ordre k de X : $\mathbf{E}\left(X^k\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} x^k\mathbf{P}(X=x)$

3 Variance

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(\left(X-\mathbf{E}(X)\right)^2\right) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbf{E}(X)\right)^2 \qquad \text{(Koenig-Huygens)}$$

1) $\mathbf{V}(aX+b) = a^2\,\mathbf{V}(X)$.

2) $\mathbf{V}(X)\geqslant 0$.

3) $\mathbf{V}(X)=0 \iff (\exists\, a\in X(\Omega),\ \mathbf{P}\left(X=a\right)=1) \iff X=\mathbf{E}(X)$.

4 Écart type

$$\sigma_X = \sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$$

Variable aléatoire centrée réduite : $X^* = \dfrac{X-\mathbf{E}(X)}{\sigma_X}$.

5 Inégalités

Inégalité de Markov :
Si $X\geqslant 0$ et $a>0$,

$$\boxed{\mathbf{P}(X\geqslant a)\leqslant\frac{\mathbf{E}(X)}{a}.}$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\left|X-\mathbf{E}(X)\right|\geqslant a\right)\leqslant\frac{\sigma_X^2}{a^2}.}$$

6 Fonction de répartition

$$F_X : \left\{\begin{array}{lcl}\mathbf{R} & \to & \mathbf{R}\\ x & \mapsto & \mathbf{P}(X\leqslant x) = \sum_{x_i\leqslant x}\mathbf{P}(X=x_i)\end{array}\right\}$$

F_X est positive, croissante et $\lim_{x\to-\infty}F_X(x)=0$ et $\lim_{x\to+\infty}F_X(x)=1$.

Si $X(\Omega)\subset\mathbf{Z}$, alors $\forall k\in\mathbf{Z},\ \mathbf{P}(X=k) = \mathbf{P}(X\leqslant k)-\mathbf{P}(X\leqslant k-1)$.

Loi		**Exemple type**	$X(\Omega)$		$\mathbf{E}(X)$	σ_X
Loi certaine		situation déterministe	$\{m\}$	$\mathbf{P}(X=m)=1$	m	0
Loi uniforme	$\mathscr{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$	lancer d'un dé équilibré	$\llbracket 1,n\rrbracket$	$\mathbf{P}(X=k)=\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$
Loi de Bernoulli	$\mathscr{B}(p),\ p\in]0,1[$	tirage à deux issues	$\{0,1\}$	$\mathbf{P}(X=1)=p$	p	$\sqrt{pq}$
Loi binomiale	$\mathscr{B}(n,p),\ p\in]0,1[$	tirage avec remise	$\llbracket 0,n\rrbracket$	$\mathbf{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k\left(1-p\right)^{n-k}$	np	$\sqrt{npq}$

Couples et vecteurs de variables aléatoires

7 Lois conjointes et marginales

Loi conjointe : $\mathbf{P}\left((X,Y)=(x,y)\right)=\mathbf{P}\left(X=x \text{ et } Y=y\right).$

Lois marginales : « lois pour une seule variable. »

Loi conjointe $\not\Leftarrow\!\Rightarrow$ lois marginales : $\mathbf{P}_X(x)=\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbf{P}\left([X=x]\cap[Y=y]\right).$

(C'est la formule des probabilités totales.) $\mathbf{P}_Y(y)=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbf{P}\left([X=x]\cap[Y=y]\right).$

Loi image d'un couple : $$\mathbf{P}\left(u(X,Y)=t\right)=\sum_{\substack{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)\\ u(x,y)=t}}\mathbf{P}\left(X=x \text{ et } Y=y\right).$$

Loi de la somme : $$\mathbf{P}(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}\mathbf{P}\big([X=i]\cap[Y=k-i]\big).$$

Théorème de transfert : $$\mathbf{E}\left(u(X,Y)\right)=\sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)}u(x,y)\mathbf{P}(X=x,Y=y).$$

8 Covariance

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}\,(X,Y) &= \mathbf{E}\big[\,(X-\mathbf{E}(X))\;(Y-\mathbf{E}(Y))\,\big]\\
&= \mathbf{E}\,(XY)-\mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y) && \text{(Koenig-Huygens)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}(X,Y) &= \mathbf{Cov}(Y,X) && \text{(symétrie)}\\
\mathbf{Cov}(aX+b,Y) &= a\,\mathbf{Cov}(X,Y)\\
\mathbf{Cov}(aX_1+X_2,Y) &= a\,\mathbf{Cov}(X_1,Y)+\mathbf{Cov}(X_2,Y) && \text{(linéarité)}\\
\mathbf{Cov}(X,X) &= \mathbf{V}(X)\geqslant 0. && \text{(positive)}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{V}(X+Y)=\mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(Y)+2\,\mathbf{Cov}(X,Y).$$

9 Variables aléatoires indépendantes

Variables aléatoires indépendantes :

$$\forall(x,y)\in(X,Y)(\Omega),\quad \mathbf{P}\left([X=x]\cap[Y=y]\right)=\mathbf{P}(X=x)\mathbf{P}(Y=y).$$

Si X et Y sont indépendantes, alors

1) Pour tous les ensembles A et B, $\mathbf{P}(X\in A\,,\,Y\in B)=\mathbf{P}(X\in A)\mathbf{P}(Y\in B)$.
2) Pour toutes les applications $f:E\to F$ et $g:E'\to F'$, $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
3) $\mathbf{E}(XY)=\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$.
4) $\mathbf{Cov}(X,Y)=0$.
5) $\mathbf{V}(X+Y)=\mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(Y)$.

Remarque : deux **variables de Bernoulli** X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si les événements $[X_1=1]$ et $[X_2=1]$ sont indépendants.

10 Généralisation à n variables aléatoires

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ sont **mutuellement indépendantes** si,

pour tous les éléments $x_1,\,x_2,\cdots x_n$ $$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i=x_i]\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}\left(X_i=x_i\right).$$

Si les variables sont mutuellement indépendantes :

1) $\mathbf{E}(X_1\,X_2\cdots X_n)=\mathbf{E}(X_1)\,\mathbf{E}(X_2)\cdots\mathbf{E}(X_n)$.
2) $\mathbf{V}(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\mathbf{V}(X_1)+\mathbf{V}(X_2)+\cdots+\mathbf{V}(X_n)$.
3) Si $\forall i\in[\![1,n]\!],\,X_i\hookrightarrow\mathscr{B}(p)$, (même paramètre) alors $\sum_{i=1}^{n}X_i\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$.
4) Si $X\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$ et $Y\hookrightarrow\mathscr{B}(m,p)$ (même paramètre p), alors $X+Y\hookrightarrow\mathscr{B}(n+m,p)$.