# Équations différentielles linéaires

## 1 Ordre 1

### second membre constant

Mettre l'équation sous la forme

$$y' + ay = b.$$

- **Si a $\neq$ 0**

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-ax} + \frac{b}{a},\ \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

- **Si a $=$ 0**

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto bx + \lambda,\ \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

### second membre continu

On écrit la solution sous la forme

$$f : x \mapsto \lambda(x)\, \mathrm{e}^{-ax}.$$

- On « injecte » cette solution dans l'équation différentielle (sans oublier de dériver $\lambda$),
- on en déduit la valeur de $\lambda'(x)$,
- on trouve $\lambda(x)$ en intégrant (à une constante près).

## 2 Ordre 2 sans second membre

Mettre l'équation sous la forme ($a \neq 0$)

$$ay'' + by' + cy = d.$$

On pose l'équation caractéristique :

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

et $\Delta$ son discriminant.

- **Si** $\Delta > 0$
  $r_1$ et $r_2$ : racines (distinctes) de l'équation caractéristique.
$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{r_1 x} + \mu\, \mathrm{e}^{r_2 x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

- **Si** $\Delta = 0$
  $r$ : racine double de l'équation caractéristique.
$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto (\lambda + \mu \boldsymbol{x})\ \mathrm{e}^{rx},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

- **Si** $\Delta < 0$
  $r_1$ et $r_2$ : racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.
$$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta.$$
$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))\ \mathrm{e}^{\alpha x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

## 3 Ordre 2 avec second membre

**solution générale = solution homogène + solution particulière**

Pour trouver une solution particulière :

- Si le second membre $d$ est constant, on cherche une solution particulière
  - Si $c \neq 0$, $x \mapsto \frac{d}{c}$ solution constante
  - Si $c = 0$, et $b \neq 0$, $x \mapsto \frac{d}{b}x$ solution linéaire
  - Si $c = 0$, et $b = 0$, $x \mapsto \frac{d}{2a}x^2$
- Si le second membre est de la forme $\mathrm{e}^{mx}$ avec $m \in \mathbf{R}$, on s'inspire du cas précédent
  - si $m$ n'est pas solution de l'équation caractéristique, on cherche sous la forme $x \mapsto k\, \mathrm{e}^{mx}$.
  - si $m$ est racine simple l'équation caractéristique, on cherche sous la forme $x \mapsto kx\, \mathrm{e}^{mx}$.
  - si $m$ est racine double l'équation caractéristique, on cherche sous la forme $x \mapsto kx^2\, \mathrm{e}^{mx}$.

  On remplace cette solution dans l'équation différentielle, et on en déduit la valeur de $k$.