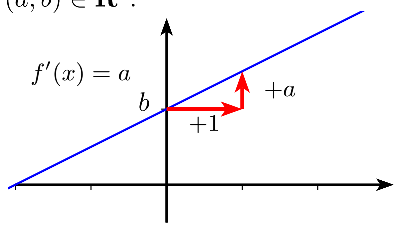
Fonctions usuelles

1 Équations de droites et portions de droites

Fonctions linéaire et affine : $f(x) = ax+b$, $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.
a : coefficient directeur,
b : ordonnée à l'origine.

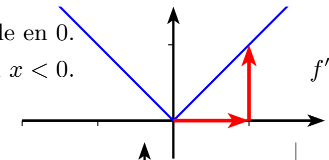
$a > 0 \Rightarrow f$ croissante
$a < 0 \Rightarrow f$ décroissante.

Si $b = 0$, la fonction est linéaire
(lien de proportionnalité)



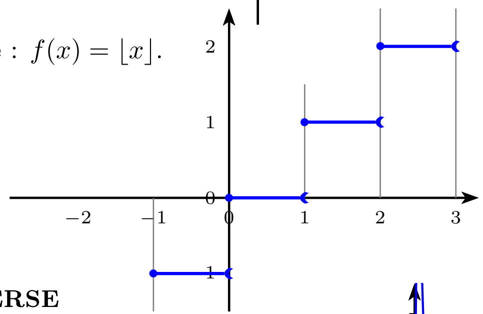
Fonction valeur absolue : $f(x) = |x|$
Courbe paire par rapport à l'axe des abscisses.

f continue mais pas dérivable en 0.
$f'(x) = -1$ si $x < 0$.



$f'(x) = 1$ si $x > 0$.

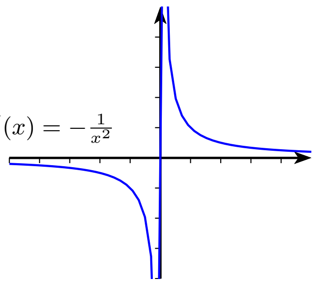
Fonction partie entière : $f(x) = \lfloor x \rfloor$.



2 Fonction inverse

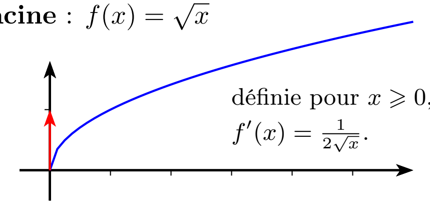
Fonction inverse : $f(x) = \frac{1}{x}$
Hyperbole, symétrique par rapport à l'origine,
La fonction n'est **pas définie** en 0.

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$



3 Fonction racine

Fonction racine : $f(x) = \sqrt{x}$



définie pour $x \geqslant 0$, **non dérivable** en 0.
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

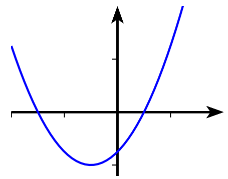
4 Fonctions polynomiales de degré 2

$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbf{R}^3$ et $a \neq 0$.
$f'(x) = 2ax + b$.

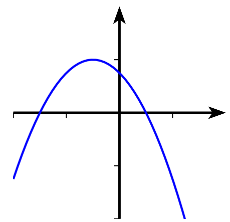
- $a > 0 \Rightarrow$ courbe « vers le haut »
- $a < 0 \Rightarrow$ courbe « vers le bas »

Parabole ax^2 translatée suivant Ox de $-\frac{b}{2a}$ et Oy de $-\frac{\Delta}{4a}$,
Le facteur a traduit une dilatation suivant l'axe y.

a>0

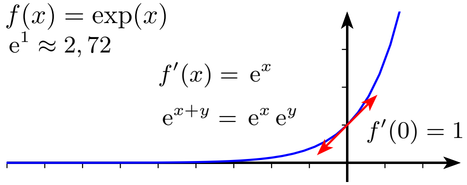


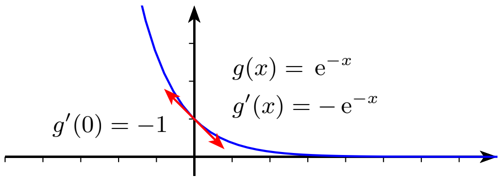
a<0



5 Fonction exponentielle

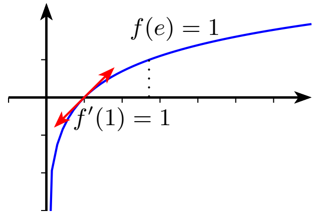
$f(x) = \exp(x)$
$e^1 \approx 2,72$





6 Fonction logarithme

$f(x) = \ln(x)$.
$f'(x) = \frac{1}{x}$.
Application réciproque de exp.
Courbe symétrique de exp
par rapport à la droite $y = x$.
⚠ définie uniquement pour $x > 0$.

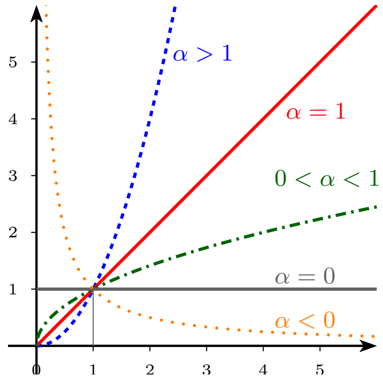


7 Croissances comparées simplifiées

- *x l'emporte sur le logarithme :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0+} x \ln x = 0$.
- *l'exponentielle l'emporte sur x :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\, e^x = 0$.

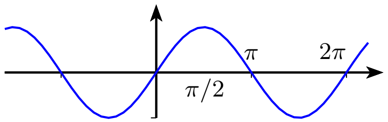
8 Fonctions puissances

$$p_\alpha : x \mapsto x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}.$$
$$p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

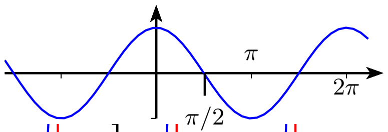


9 Fonctions trigonométriques circulaires

Fonction sinus : $f(x) = \sin x$.
Sinusoïde de période 2π,
Courbe symétrique par rapport à l'origine.



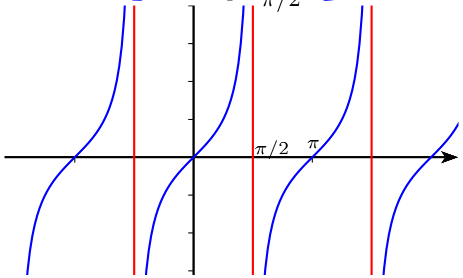
Fonction cosinus : $f(x) = \cos x$.
Sinusoïde de période 2π.
Même courbe que $\sin(x)$, translatée de $\frac{\pi}{2}$.
Courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



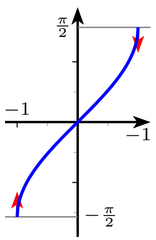
Fonction tangente :

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

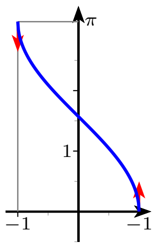
Période π,
Courbe symétrique par rapport à l'origine.
Pas définie en $\frac{\pi}{2} + k\pi$.
$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.



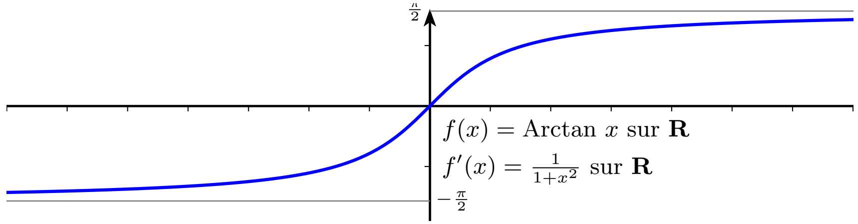
Fonction arcsinus :
$f(x) = \mathrm{Arcsin}\ x$ sur $[-1, 1]$.
$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1, 1[$.
Courbe symétrique par rapport à l'origine.



Fonction arccosinus :
$f(x) = \mathrm{Arccos}\ x$ sur $[-1, 1]$.
$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1, 1[$.
Courbe symétrique par rapport au point $(0, \frac{\pi}{2})$.



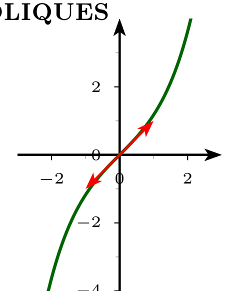
Fonction arctangente : $f(x) = \mathrm{Arctan}\ x$.
Courbe symétrique par rapport à l'origine.



10 Fonctions trigonométriques hyperboliques

sinus hyperbolique :

$$\mathrm{sh} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{sh}\,(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}. \end{array} \right.$$



$\forall x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}\,(x) > 0$.
Courbe symétrique par rapport à l'origine.
Sur $\mathbf{R}_+$ la courbe est au dessus de la droite $y = x$.
Branches paraboliques verticales.

cosinus hyperbolique :

$$\mathrm{ch} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{ch}\,(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}. \end{array} \right.$$

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}\,(x).$$

$\mathrm{ch}\,(0) = 1$ qui est le minimum de la fonction.
Branches paraboliques verticales.
Courbe symétrique par rapport à la droite $x = 0$.

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.$$

tangente hyperbolique :

$$\mathrm{th} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{th}\,(x) = \dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}. \end{array} \right.$$

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}.$$

Sur $\mathbf{R}_+$ la courbe est sous la droite $y = x$.
Courbe symétrique par rapport à l'origine.