Convergence des suites

1 Programme officiel

Les éléments en italique sont des ajouts ou précisions personnels, hors programme officiel.

c) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée si, et seulement si $(\lvert u_n\rvert)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée.
Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.	*Les suites définies implicitement, seront davantage détaillées dans un chapitre spécifique.*

d) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notation $u_n \to \ell$, $\lim u_n$.
Suite convergente, divergente.	*On parle de nature de la suite.*
Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
Passage à la limite d'une inégalité large.	
Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.	
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	Utilisation d'une majoration de la forme $\lvert u_n - \ell\rvert \leqslant v_n$ où (v_n) converge vers 0.

e)Suites monotones	
Théorème de la limite monotone.	*Éviter de lui donner d'autres noms.*
Théorème des suites adjacentes.	

f) Suites extraites	
Suite extraite. Si une suite possède une limite alors toutes ses suites extraites possèdent la même limite.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ.
Théorème de Bolzano-Weierstrass.	Principe de démonstration par dichotomie.

g) Traduction séquentielles de certaines propriétés	
Partie dense dans $\mathbf{R}$.	Une partie de $\mathbf{R}$ est dense dans $\mathbf{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.
Caractérisation séquentielle de la densité.	Densité de l'ensemble des décimaux, des rationnels, des irrationnels.
Si X est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de $\mathbf{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$ (resp. $+\infty$).	

h) Suites complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.
Théorème de Bolzano-Weierstrass.	

i) Suites particulières	
Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples. Représentation géométrique. Si (u_n) converge vers un élément ℓ en lequel f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.	Cette étude est l'occasion d'introduire la notion d'intervalle stable par une fonction. Pour l'étude de la monotonie de (u_n) on souligne l'intérêt, d'une part de **l'étude du signe de** $f(x) - x$, et d'autre part, de l'utilisation de la croissance éventuelle de f.

2 Exercices à savoir refaire

Et preuves sur lesquelles insister davantage.

- Prouver une opération sur les limites (par exemple si $u_n \to \ell \in \mathbf{R}_+^*$ et $v_n \to +\infty$, alors $u_n v_n \to +\infty$, ou si $u_n \to \ell \in \mathbf{R}$, et $\lambda \in \mathbf{R}$ alors $\lambda u_n \to \lambda\ell$... ou toute autre opération « usuelle »).
- théorème de la limite monotone (ne demander qu'un seul des deux cas : borné ou non).
- Théorème des suites adjacentes.
- Théorème de Bolzano-Weierstrass (cas réel).
- Théorème de Bolzano-Weierstrass (cas complexe).
- Densité des décimaux dans $\mathbf{R}$.
- Soit u une suite à valeurs non nulles. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in]-1, 1[$. Montrer que $u_n \to 0$.
- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que que la suite tend vers $+\infty$ par une des méthodes suivantes, au choix de l'examinateur :
  - Minoration par une intégrale.
  - Minoration de $H_{2n} - H_n$, ou étude de (H_{2^n}).
  - Étude des suites adjacentes $(S_n - \ln(n))$ et $(S_n - \ln(n+1))$.
- Nature de la suite définie par $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
- CCINP 43 : Soit $x_0 \in \mathbf{R}$.
  On définit (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{Arctan}(u_n)$.
  1) (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
     (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
  2) Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbf{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbf{R}$, $h(x) = h(\mathrm{Arctan}\, x)$.