ESPACES VECTORIELS

À SAVOIR

- Caractérisation des sous espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Intersection d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.
- Sous espace vectoriel engendré par n vecteurs (ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs).
- Familles libres, familles liées
  - Définition par indépendance linéaire, caractérisation par la combinaison linéaire nulle, caractérisation par l'unicité de l'écriture.
  - Condition de conservation de la liberté lors de l'ajout d'un vecteur.
  - Les familles extraites d'une famille libre sont libres.
  - Détermination de la liberté d'une famille par réalisation d'un pivot sur la matrice des vecteurs colonne.
- Familles génératrices
  - Définition par $E = \text{Vect}\,(x_1, \cdots, x_n)$, tout élément de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille,
  - Une famille génératrice complétée reste génératrice.
- Bases
  - Famille libre et génératrice. Interprétation pour l'écriture des vecteurs de E.
  - Tout espace vectoriel (non trivial) admet au moins une base (admis).
- Dimension finie
  - Base extraite, Lemme de Steinitz, dimension d'un espace.
  - Si $\mathscr{F}$ libre, $\mathscr{G}$ génératrice dans un espace de dimension n, alors $\text{Card}\,\mathscr{F} \leq n \leq \text{Card}\,\mathscr{G}$
  - Équivalence entre la liberté et le caractère générateur d'une famille qui a autant d'éléments que la dimension de l'espace.
  - Si $F \subset G$, alors $\dim F \leq \dim G$ et l'égalité des espaces est équivalente à l'égalité des dimensions.

PREUVES ET EXERCICES À SAVOIR REFAIRE A MINIMA

- L'intersection de deux espaces vectoriels est un espace vectoriel.
- Équivalence entre deux caractérisations des familles libres : (1 $\iff$ 2) ou (2 $\iff$ 3).
  1) Une famille est libre si aucun vecteur ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres,
  2) $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ libre si et seulement si $\left(\forall (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = 0\right)$,
  3) $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ libre si et seulement si tout vecteur de $\text{Vect}\,(x_1, \cdots, x_n)$ s'exprime de manière *unique* comme combinaison linéaire des $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$.
- Une famille génératrice complétée est encore génératrice.