Semaine 01 du 15/09/2025

1 Programme officiel

Les éléments en italique sont des ajouts ou précisions personnels, hors programme officiel.

1.1 Récurrence et suites usuelles

a) Rudiments de logique	
Raisonnement par récurrence (simple, double, forte, *finie*).	On pourra relier le raisonnement par récurrence au fait que toute partie non vide de $\mathbf{N}$ possède un plus petit élément. Toute construction et toute axiomatique de $\mathbf{N}$ sont hors programme. *Axiomatique de Péano donnée à titre culturel, mais sans développements.*

i) Suites particulières	
Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.	Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbf{C}$, recherche d'une solution constante, détermination des solutions.
Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.	*Structure des suites récurrentes d'ordre 2, avec second membre.*
Suites définies linéairement par des couples.	*Se ramener à une relation d'ordre 2.*

1.2 Révisions de terminale : manipulations algébriques

e) Équations algébriques	
Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z-a$.	*Dans* $\mathbf{R}$ *uniquement pour le moment.* *Mise sous forme canonique pour un second degré* *Le lien racine/factorisation est admis aux degrés supérieurs.*
Résolution des équations du second degré. Somme et produit de racines.	

1.3 Sommes et produits

a) Sommes et produits	
Somme d'une famille finie de nombres réels *ou complexes.*	Notations $\sum_{i \in I} a_i$, $\sum_{i=1}^{n} a_i$, Cas où I est vide.
Sommes et produits télescopiques, exemples de changement d'indice et de regroupements de termes *La notion de recouvrement disjoint a été donnée.*	Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension. *Translation, inversion de l'ordre de sommation.*
Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} x^k$.	
Factorisation de $a^n - b^n$ par $a-b$.	*Égalité de Bernoulli, présentée sous la forme* $\forall (a,b) \in \mathbf{C}^2, \forall n \in \mathbf{N}$, $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k.$
Sommes télescopiques	
Pas de factorielles, pas de Newton, ni de sommes doubles...	

2 Exercices à savoir refaire

Chaque étudiant aura à traiter 4 questions de cours choisies par l'interrogateur dans la liste suivante.

Première question de cours : Tracer une fonction usuelle avec ses éléments remarquables, domaine de définition, dérivabilité, dérivée :

$$\ln,\ \exp,\ x \mapsto \frac{1}{x},\ x \mapsto x^2,\ x \mapsto \sqrt{x},\ x \mapsto \cos(x),\ x \mapsto \sin(x).$$

Ou l'allure de fonctions $x \mapsto x^a = \exp(a \ln x)$ en fonction de $a \in \mathbf{R}$ sur un même graphe.

Deuxième question de cours :

- Donner un exemple d'une partie non vide majorée de $\mathbf{R}$ qui n'admet pas de plus grand élément. Le prouver.
- Toute partie non vide majorée de $\mathbf{N}$ admet un plus grand élément.
- « Toute partie non vide de $\mathbf{N}$ admet un plus petit élément » implique le principe de récurrence
- Montrer que tout nombre entier naturel $\geqslant 2$ admet un diviseur premier.

Troisième question de cours : Déterminer le terme général d'une suite à partir

- d'une relation arithmético-géométrique,
- d'une relation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants,
- d'un système linéaire de deux suites à l'ordre 1 et à coefficients constants (se ramener à l'ordre 2).

Quatrième question de cours : Calcul avec le formalisme du signe $\sum$:

- Calculer (preuve) une somme parmi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$.
- Pour $q \neq 1$, calcul de $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k$.
- Prouver que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall (a, b) \in \mathbf{C}^2$, $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum\limits_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$.

3 Quelques axiomes :

1) La note n'évalue pas le candidat, mais sa prestation.
2) La note maximale autorisée est 20.
3) La note minimale autorisée est 0.
4) Un maximum et un minimum sont atteints (cf points précédents).
5) Exercice à savoir *refaire* : refaire ne veut pas dire *recracher sans comprendre*. Rien n'interdit quelques instants de reflexion si besoin car ce n'est pas du « par coeur ».
6) Exercice à savoir refaire non su $\Rightarrow$ note inférieure à 8.
7) Cours non su $\Rightarrow$ note inférieure à 8.
8) Une implication n'est pas une équivalence (cf points précédents).
9) Un khôlleur est sympa.
10) Si le khôlleur ne paraît pas sympa : c'est que vous avez agressé trop violemment les mathématiques.
11) Une khôlle n'est pas optionnelle : toute absence sera sanctionnée.
12) Pour les **binômes de colle** : un volontaire peut demander à utiliser la place vacante.
    Dans ce cas, il n'est pas noté et peut être dispensé de question de cours s'il le souhaite.