

SEMAINE 03 DU 29/09/2025

1 PROGRAMME OFFICIEL

Les éléments en italique sont des ajouts ou précisions personnels, hors programme officiel.

1.1 Logique et raisonnement

a) Rudiments de logique	
Quantificateurs.	L'emploi des quantificateurs en guise d'abréviation est exclu. <i>Lire et comprendre un énoncé quantifié. Savoir écrire un énoncé de façon quantifiée (par exemple le principe de récurrence). Prouver un énoncé quantifié simple (exemple $\forall x \in E, \exists y \in F \dots$)</i>
Implication, contraposition, équivalence.	Les étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.
Modes de raisonnement : par disjonction des cas, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.	Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et condition suffisante.
Raisonnement par récurrence (simple, double, forte).	<i>Reprise du chapitre sur la récurrence et suites usuelles.</i>

2 QUESTIONS DE COURS

Question 1 :

- 1) $\sqrt{2} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.
- 2) $(a + b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow (a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \text{ ou } b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$.
- 3) $\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2, (\forall n \in \mathbf{N}, a2^n + b3^n = 0) \iff (a = b = 0)$.
- 4) Toute fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
- 5) Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

Question 2 : Après avoir rappelé les formules de $\cos(a + b)$, $\sin(a + b)$, retrouver (preuve) deux formules usuelles parmi :

(a) $\tan(a + b)$, $\tan(a - b)$.

(b) linéarisation :

$$\cos(a) \cos(b), \sin(a) \sin(b), \cos(a) \sin(b), \sin(a) \cos(b), \cos^2(a), \sin^2(a).$$

(c) factorisation :

$$\cos(a) + \cos(b), \sin(a) + \sin(b), \cos(a) - \cos(b), \sin(a) - \sin(b).$$

(d) angle moyen en fonction de $\tan\left(\frac{a}{2}\right)$:

$$\cos(a), \sin(a), \tan(a).$$

3 EXERCICES

Outre la logique, on n'hésitera pas à demander des calculs de sommes. On garde les exercices de trigonométrie pour plus tard