Semaine 04 du 9/10/2023

1 Programme officiel

Les éléments en italique sont des ajouts ou précisions personnels, hors programme officiel.

1.1 Logique et raisonnement

a) Rudiments de logique	
Quantificateurs.	L'emploi des quantificateurs en guise d'abréviation est exclu. *Lire et comprendre un énoncé quantifié. Savoir écrire un énoncé de façon quantifiée (par exemple le principe de récurrence). Prouver un énoncé quantifié simple (exemple $\forall x \in E, \exists y \in F$...)*
Implication, contraposition, équivalence.	Les étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.
Modes de raisonnement : par disjonction des cas, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.	Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et condition suffisante.
Raisonnement par récurrence (simple, double, forte).	*Reprise du chapitre sur la récurrence et suites usuelles.*

1.2 Ensembles

b) Ensembles	
Ensembles, appartenance. Ensemble vide.	
Inclusion. Partie (ou sous-ensemble).	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence, et $E \setminus A$, $\overline{A}$ et A^c pour le complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathcal{P}(E)$.
Recouvrement disjoint, partition.	

c) Applications et relations	
Famille d'éléments d'un ensemble.	

2 Exercices à savoir refaire

On proposera deux questions de cours successives avant les exercices.

3 Exercices à savoir refaire

Et preuves sur lesquelles insister davantage (pas exclusif!)

1) $\sqrt{2} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.
2) $(a + b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \Rightarrow (a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ou $b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$.
3) $\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2, \ (\forall n \in \mathbf{N}, \ a2^n + b3^n = 0) \iff (a = b = 0)$.
4) Toute fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
5) Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que
$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \ f\,(y - f(x)) = 2 - x - y.$$
6) Résoudre $\text{Arcsin}\,(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) + \text{Arcsin}\left(\frac{5}{13}\right)$.
7) Montrer que $\{x > 0, \ \forall y > 0, \ x < y\} = \emptyset$.
8) Montrer que $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$.