Semaine 05 du 16/10/2023

1 Programme officiel

Les éléments en italique sont des ajouts ou précisions personnels, hors programme officiel.

c) Inégalités	
Relation d'ordre sur **R**. Compatibilité avec les opérations.	Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations. *Lien entre inégalités et monotonie (large ou stricte), cas du passage aux antécédents.*
Parties positives et négatives.	
Valeur absolue. Inégalité triangulaire *et son corollaire*.	Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $\lvert x-a\rvert \leqslant b$. *Inégalité triangulaire avec une somme finie.*
Dans **R**, parties majorées, minorées, bornées.	
Majorant, minorant ; maximum, minimum.	
Partie entière d'un nombre réel.	Notation $\lfloor x \rfloor$.

a) Ensemble des nombres usuels	
Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels.	Les constructions des ensembles de nombres usuels (et en particulier celle de **R**) sont hors programme.
Tout intervalle ouvert non vide rencontre **Q** et $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$.	
Droite achevée $\overline{\mathbf{R}}$.	

b) Propriété de la borne supérieure	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de **R**.	Notation $\sup X$, $\inf X$.
Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de **R** admet une borne supérieure (resp. inférieure).	
Une partie X de **R** est un intervalle si, et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a, b] \subset X$.	

2 Exercices à savoir refaire

On proposera deux questions de cours successives avant les exercices.

Question 1

1) Inégalité triangulaire et son corollaire (sur **R**).
2) Croissance de la partie entière.
3) Déterminer $\lfloor -x \rfloor + \lfloor x \rfloor$ selon x.
4) $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{Z}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
5) $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
6) **Q** est dense dans **R**.

Question 2

1) La divisibilité est une relation d'ordre partielle sur **N**.
2) La relation d'inclusion est une relation d'ordre partielle sur $\mathcal{P}(E)$.
3) La relation de congruence modulo 2π est une relation d'équivalence sur **R**.
4) Les classes d'équivalence forment une partition.
5) Pour A une partie de **R**,

$$S = \sup A \iff (S \text{ est un majorant de } A \text{ et } \forall \varepsilon > 0,\ ]S-\varepsilon, S] \cap A \neq \emptyset).$$

Pour les exercices, ne pas hésiter à faire travailler sur les inégalités.