Semaine 06 du 06/11/2022

1 Programme officiel

a) Généralités sur les fonctions

Ensemble de définition.	*On veillera à toujours préciser le domaine de définition de la fonction avant de réaliser son étude.*
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par les transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.
Parité, imparité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.
Somme, produit, composée.	
Monotonie (large et stricte).	*Voir les chapitres de logique et sur les réels (inégalités).*
Fonctions majorées, minorées, bornées.	*Idem.* Traduction géométrique de ces propriétés. La fonction f est bornée si, et seulement si $\lvert f\rvert$ est majorée.

b) Dérivation

Dérivée d'une fonction.	Notation $f'(x)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$. *On reste sur les notions du lycée. On comprend qu'il s'agit de dérivée la fonction f en x, et non $f(x)$.*
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.	Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; ils ne sont pas démontrés à ce stade. Exemples simples de calculs de dérivées partielles. *Notations $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.*
Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.	Résultat admis à ce stade.
Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe.	*Schéma d'étude d'une fonction.* Application : recherche d'extremums, démonstrations d'inégalités.
Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.	
Dérivées d'ordre supérieur.	
Fonctions convexes parmi les fonctions deux fois dérivables, point d'inflexion.	*Simple rappel de terminale sans démonstration. Position par rapport à la tangente, par rapport aux cordes.*

c) Fonctions usuelles

Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Dérivées, variations, représentations graphiques. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbf{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbf{R}_-^*$. Logarithme décimal, logarithme en base 2.
Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.	
Croissantes comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle. *Voir la fiche sur les inégalités.*	Inégalités $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
Dérivée, variations, représentation graphique.	
Fonctions hyperboliques sh, ch, th.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions hyperboliques récirpques sont hors programme. Le seule formule exigible est $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.
Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.	La dérivée est définie par les parties réelle et imaginaire.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.	Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.
Dérivée de e^φ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.	

2 Exercices à savoir refaire

Avertissement pour les colleurs :

- **Le cours sur les fonctions usuelles a été étudié en autonomie,** le khôlleur sera particulièrement vigilant sur la précision des connaissances pour ne pas laisser passer d'éventuelles incompréhensions.
- Le cours sur les applications dans le cas général n'a pas encore été étudié (pas d'images directes, réciproques, injectivité...)
  Pour l'application réciproque, on reste avec la définition :
  f bijective de I sur J si, et seulement si
  $$\forall y \in J,\ \exists! x \in I,\ f(x) = y.$$
  Quand f est bijective, l'application qui à $y \in J$ associe son unique antécédent est appelée *application réciproque* et noté f^{-1}.

Question de cours 1

1) Énoncer **précisément** un théorème : théorème des valeurs intermédiaires ou théorème des bornes atteintes ou théorème de la bijection continue, dérivabilité de la réciproque.
2) Énoncer précisément la définition de la dérivabilité de f en a, ou pour $k \in \mathbf{N}$, la définition d'une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle I.
3) Donner la méthode pour l'étude d'une branche infinie.

Question de cours 2

1) Tracer le graphe d'une fonction usuelle (sans justifications mais avec les éléments remarquables, le domaine de définition et l'expression de la dérivée) :
   exponentielle, logarithme, puissance quelconque, fonctions circulaires et leur réciproque, fonctions hyperboliques,

Question de cours 3

1) Montrer que sh est bijective et trouver sa réciproque.
2) Calcul de la dérivée d'une fonction circulaire réciproque (la dérivabilité est admise).
3) f bornée sur I si, et seulement si $|f|$ majorée sur I.
4) Soit $f\ : (x, y) \mapsto \ln(1 + xy)$.
   Détermination du domaine de définition, montrer que f n'a pas d'extremum local sur ce domaine.
5) Étudier l'application : $f : x \mapsto \frac{1}{2}\cos 2x - \cos x$.
6) Étudier l'application : $f : x \mapsto \frac{2x^2+x-1}{x^2+x}$.
7) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.
8) Pour $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, exprimer $\operatorname{ch}(a+b)$ et $\operatorname{sh}(a+b)$ en fonction de $\operatorname{ch}(a)$, $\operatorname{ch}(b)$, $\operatorname{sh}(a)$ et $\operatorname{sh}(b)$ (avec la preuve).