Semaine 07 du 10/11/2024

1 Programme officiel

1.1 Généralités sur les fonctions

c) Applications et relations	
Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Le programme ne distingue par les notion de fonction et d'application. Notations $\mathscr{F}(E, F)$ et F^E.
Famille d'éléments dans un ensemble.	
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.	Notation $\mathbf{1}_A$.
Restriction et prolongement.	Notation $f_{\vert A}$. *Pour une corestriction, ou restriction au but, on introduit la notation $f^{\vert B}$, mais elle devra être redéfinie avant toute utilisation.*
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre. *La notation officielle est utilisée, on veillera à bien la distinguer de la notion d'application réciproque.*
Composition.	
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.	
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque d'une composée.	Notation f^{-1}. Compatibilité de cette notation avec celle d'image réciproque.

1.2 Révisions de terminale : fonctions

a) Généralités sur les fonctions	
Ensemble de définition.	*On veillera à toujours préciser le domaine de définition de la fonction avant de réaliser son étude.*
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.
Parité, imparité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.
Somme, produit, composée.	
Monotonie (large et stricte).	Fonctions majorées, minorées, bornées.
Traduction géométrique de ces propriétés. La fonction f est bornée si et seulement si $\vert f\vert$ est majorée.	

b) Dérivation

Dérivée d'une fonction.	Notation $f'(x)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x)\right)$. *On reste sur les notions du lycée. On comprend qu'il s'agit de dérivée la fonction f en x, et non de la dérivée de $f(x)$.*
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.	Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; ils ne sont pas démontrés à ce stade.
Le signe de la dérivée sur un intervalle, donne la monotonie.	Résultat admis à ce stade.
Exemples simples de calculs de dérivées partielles.	
Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.	Résultats admis à ce stade.
Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe.	*Étude des branches infinies.*
Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.	
Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.	La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.
Fonction de classe $\mathcal{C}^1$.	
Dérivées d'ordre supérieur.	
Schéma d'étude d'une fonction. *Fonctions convexes parmi les fonctions deux fois dérivables, point d'inflexion.*	*Simple rappel de terminale sans démonstration. Position par rapport à la tangente, par rapport aux cordes.*

c) Fonctions usuelles

Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Dérivées, variations, représentations graphiques.
Croissantes comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbf{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbf{R}_-^*$. Logarithme décimal, logarithme en base 2.
Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.	
Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.	
Inégalités $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$, $\ln(1+x) \leqslant x$,	
$\lvert\sin(x)\rvert \leqslant \lvert x\rvert$.	*En trigonométrie dans le programme officiel.*
Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan.	Dérivée, variations, représentation graphique.
Fonctions hyperboliques sh, ch, th.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

d) Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.	La dérivée est définie par les parties réelle et imaginaire.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.	Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.
Dérivée de $\exp(\varphi)$ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.	

c) Continuité sur un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires.	*Sans démonstration à ce stade.*
Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone.	*Ne pas confondre avec le théorème précédent.*

2 Question de cours 1

1) Soit f définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbf{R}$ et telle que $\forall T > 0$, f est T-périodique.
Montrer que $\mathscr{D} = \mathbf{R}$ et que f est constante.
2) Montrer que f est bornée si, et seulement si $|f|$ est majorée.
3) Soit $x \in \mathbf{R}$, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.
4) Étude complète de $x \mapsto \frac{1}{2}\cos(2x) - \cos(x)$.
5) Étude de la branche en $+\infty$ de $f\ : x \mapsto \dfrac{3x^3 - 5x^2 + 2}{x^2 - 4}$.

3 Question de cours 2

Pour $a \in \mathbf{R}^*$ et $b \in \mathbf{R}$, un calcul parmi :

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 2},\quad \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}\,(t)},\quad \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}},\quad \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + \sin(t)},\quad \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2 + t^2}.$$

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 2t + 1},\quad \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 2t - 3},\quad \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 2t + 3},\quad \int_0^x \frac{2t + 1}{t^2 + 4}\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^x t\sin(t)\ \mathrm{d}t,\quad \int_0^x \mathrm{Arctan}\ (t)\,.\,\mathrm{d}t,\quad \int_0^x \mathrm{e}^{at}\cos(bt)\ \mathrm{d}t.$$

4 Exercices

Fonctions, applications, étude des fonctions usuelles.
Pas d'intégration, ni de primitives.