Semaine 07 du 13/11/2023

1 Programme officiel

a) Nombres complexes

Parties réelle et imaginaire.	La construction de $\mathbf{C}$ est hors programme.
Opérations sur les nombres complexes.	
Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	*Révision de sommes et produits.*
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbf{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).

b) Conjugaison et module

Conjugaison, compatibilité avec les opérations.	Image du conjugué dans le plan complexe.
Module.	Interprétation géométrique de $\vert z - z'\vert$, cercles et disques.
Relation $\vert z\vert^2 = z\overline{z}$, module d'un produit, d'un quotient.	
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	*et son corollaire.*

c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbf{R}$.	Notation $\mathbf{U}$.
Exponentielle d'une somme.	
Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$.	Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$. Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$.

d) Forme trigonométrique

Forme trigonométrique de $r\,e^{i\theta}$ $(r > 0)$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Argument d'un produit, d'un quotient.	*On veillera, autant que possible, à donner un argument dans* $]-\pi, \pi[$.
Transformation de $a\cos(t) + b\sin(t)$ en $A\cos(t - \varphi)$.	

e) Équations algébriques

Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$.	*Provisoirement admis, démontré avec le chapitre sur les polynômes.*
Résolution des équations du second degré dans $\mathbf{C}$.	Calcul des racines carrés d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.
Somme et produit des racines.	

f) Racines n-ièmes

Description des racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.	Notation $\mathbf{U}_n$. Représentation géométrique.

g) Exponentielle complexe

Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\mathfrak{Re}\,(z)}\,e^{i\,\mathfrak{Im}\,(z)}$.	Notations $\exp(z)$, e^z. Module et argument de e^z.
Exponentielle d'une somme.	
Pour tous z et z' dans $\mathbf{C}$, $e^z = e^{z'}$ si, et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbf{Z}$.	
Résolution de l'équation $e^z = a$.	

h) Interprétation géométrique des nombres complexes

Interprétation géométrique des modules et arguments de $\frac{c-a}{b-a}$.	Traduction de l'alignement et de l'orthogonalité.
Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az + b$ pour $(a, b) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$.	Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations.
Interprétation géométrique de la conjugaison.	

2 Exercices à savoir refaire

- Inégalité triangulaire et son corollaire.
- Forme canonique pour un trinôme du second degré.
- Résoudre $\delta^2 = 5 - 12i$.
- Déterminer les points M d'affixe $z \in \mathbf{C}$ tels que les points d'affixes i, z et iz soient alignés.
- Pour $z \in \mathbf{C}$, on note M le point d'affixe z, M' le point d'affixe iz, et I le point d'affixe i. Déterminer z pour que $(MM') \perp (IM)$.
- Caractériser géométriquement $f\ : z \mapsto iz - 4$.
- Pour $\theta \in \mathbf{R},$ linéariser $\sin^5(\theta)$.
- Pour $\theta \in \mathbf{R},$ délinéariser $\sin(5\theta)$.
- Pour $n \in \mathbf{N}$, $\theta \in \mathbf{R},$ calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$.
- $\cos(nt)$ ou $\sin(nt)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$.
- **CCINP 84**

  1) Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
  2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
  3) En déduire, pour $n \in \mathbf{N}^*$, les solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

- **CCINP 89**
  Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = \mathrm{e}^{i\,\frac{2\pi}{n}}$.

  1) On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
     Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
  2) On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.