# Semaine 07 du 09/11/2026

## 1 Programme officiel

### 1.1 Généralités sur les fonctions

| c) Applications et relations | |
|---|---|
| Application d'un ensemble dans un ensemble.<br>Graphe d'une application. | Le point de vue est intuitif : une application de $E$ dans $F$ associe à tout élément de $E$ un unique élément de $F$.<br>Le programme ne distingue par les notion de fonction et d'application.<br>Notations $\mathscr{F}(E, F)$ et $F^E$. |
| Famille d'éléments dans un ensemble. | |
| Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble. | Notation $\mathbf{1}_A$. |
| Restriction et prolongement. | Notation $f_{\|A}$.<br>*Pour une* corestriction*, ou restriction au but, on introduit la notation $f^{\|B}$, mais elle devra être redéfinie avant toute utilisation.* |
| Image réciproque. | Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre. *La notation officielle est utilisée, on veillera à bien la distinguer de la notion d'application réciproque.* |
| Composition. | |
| Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections. | |
| Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque d'une composée. | Notation $f^{-1}$. Compatibilité de cette notation avec celle d'image réciproque. |

### 1.2 Révisions de terminale : fonctions

| a) Généralités sur les fonctions | |
|---|---|
| Ensemble de définition. | *On veillera à toujours préciser le domaine de définition de la fonction avant de réaliser son étude.* |
| Représentation graphique d'une fonction $f$ à valeurs réelles. | Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de $f$ celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$. |
| Parité, imparité, périodicité. | Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude. |
| Somme, produit, composée. | |
| Monotonie (large et stricte). | |
| Fonctions majorées, minorées, bornées. | Traduction géométrique de ces propriétés.<br>La fonction $f$ est bornée si et seulement si $\|f\|$ est majorée. |

| b) Dérivation | |
|---|---|
| Dérivée d'une fonction. | Notation $f'(x)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$.<br>*On reste sur les notions du lycée. On comprend qu'il s'agit de dérivée la fonction $f$ en $x$, et non de la dérivée de $f(x)$.* |
| Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée. | Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; ils ne sont pas démontrés à ce stade. |
| *Le signe de la dérivée sur un intervalle, donne la monotonie.* | Résultat admis à ce stade. |
| Exemples simples de calculs de dérivées partielles. | |
| Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle. | Résultats admis à ce stade. |
| Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe. | *Étude des branches infinies.* |
| Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités. | |
| Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque. | La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique. |
| Fonction de classe $\mathcal{C}^1$. | |
| Dérivées d'ordre supérieur. | |
| *Schéma d'étude d'une fonction.*<br>*Fonctions convexes parmi les fonctions deux fois dérivables, point d'inflexion.* | *Simple rappel de terminale sans démonstration. Position par rapport à la tangente, par rapport aux cordes.* |

| c) Fonctions usuelles | |
|---|---|
| Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances. | Dérivées, variations, représentations graphiques. |
| Croissantes comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle. | Dérivée, variations, représentation graphique.<br>Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbf{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbf{R}_-^*$.<br>Logarithme décimal, logarithme en base 2. |
| Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$. | |
| Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle. | |
| Inégalités $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$, $\ln(1+x) \leqslant x$, | |
| $\lvert\sin(x)\rvert \leqslant \lvert x\rvert$. | *En trigonométrie dans le programme officiel.* |
| Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan. | Dérivée, variations, représentation graphique. |
| Fonctions hyperboliques sh, ch, th. | Dérivée, variations, représentation graphique.<br>Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$. |

| d) Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle | |
|---|---|
| Dérivée d'une fonction à valeurs complexes. | La dérivée est définie par les parties réelle et imaginaire. |
| Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient. | Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles. |
| Dérivée de $\exp(\varphi)$ où $\varphi$ est une fonction dérivable à valeurs complexes. | |

| c) Continuité sur un intervalle | |
|---|---|
| Théorème des valeurs intermédiaires. | *Sans démonstration à ce stade.* |
| Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone. | *Ne pas confondre avec le théorème précédent.* |

## 2 Question de cours 1

Tracer une fonction avec éléments remarquables, régularité, calcul de la dérivée... parmi une des fonctions usuelles au programme :

1) exponentielle, logarithme népérien et en base $a$, $x \mapsto x^a$ pour $a \in \mathbf{R}$, fonction inverse.
2) fonctions trigonométriques sin, cos, tan et leur "réciproque".
3) fonctions hyperboliques sh, ch, th.

## 3 Question de cours 2

1) Soit $f$ définie sur une partie non vide $\mathscr{D}$ de $\mathbf{R}$ et telle que $\forall T > 0$, $f$ est $T$-périodique. Montrer que $\mathscr{D} = \mathbf{R}$ et que $f$ est constante.
2) Montrer que $f$ est bornée si, et seulement si $|f|$ est majorée.
3) Étude complète de $x \mapsto \frac{1}{2}\cos(2x) - \cos(x)$.

## 4 Question de cours 3

1) La composée de deux injections (resp. surjections) est une injection (resp. surjection).
2) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
3) Pour $f : E \to F$ et $g : F \to G$, $g \circ f$ surjective de $E$ sur $G \Rightarrow g$ surjective de $F$ sur $G$.
4) $f$ admet une réciproque si, et seulement si elle est bijective.

## 5 Exercices

Étude complète de fonctions, y compris les branches infinies.
Des questions associées sur l'injectivité, surjectivité, bijectivité, images directes et réciproques, à l'occasion de fonctions $I \to \mathbf{R}$.