Semaine 08 du 20/11/2023

1 Programme officiel

c) Applications et relations

Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Le programme ne distingue par les notion de fonction et d'application. Notations $\mathscr{F}(E, F)$ et F^E.
Famille d'éléments dans un ensemble.	
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.	Notation $\mathbf{1}_A$.
Restriction et prolongement.	Notation $f_{\mid A}$. *Pour une corestriction, ou restriction au but, on introduit la notation $f^{\mid B}$, mais elle devra être redéfinie avant toute utilisation.*
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre. *La notation officielle est utilisée, on veillera à bien la distinguer de la notion d'application réciproque.*
Composition.	
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.	
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque d'une composée.	Notation f^{-1}. Compatibilité de cette notation avec celle d'image réciproque.

a) Calcul de primitives

Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'elles. On rappelle, sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée f. On pourra noter $\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbf{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.
Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques et des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Intégration par parties, changement de variable.	Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

2 Exercices à savoir refaire

Question de cours 1

1) Une ou plusieurs propriétés sur les images directes ou réciproques (croissance, union, intersection).
2) La composée de deux injections (resp. surjections) est une injection (resp. surjection).
3) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
4) Pour $f : E \to F$ et $g : F \to G$, $g \circ f$ surjective de E sur $G \Rightarrow g$ surjective de F sur G.
5) f admet une réciproque si, et seulement si elle est bijective.

Question de cours 2

Pour $a \in \mathbf{R}^*$ et $b \in \mathbf{R}$, un calcul parmi :

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-2}, \quad \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}(t)}, \quad \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}, \quad \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin(t)}, \quad \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2}.$$

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+1}, \quad \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t-3}, \quad \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+3}, \quad \int_0^x \frac{2t+1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^x t\sin(t)\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^x \mathrm{Arctan}\,(t)\,.\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^x \mathrm{e}^{at}\cos(bt)\,\mathrm{d}t.$$