Semaine 09 du 24/11/2025

1 Programme officiel

b) Équations différentielles linéaires du premier ordre

Équation différentielle linéaire du premier ordre $$y' + a(x)y = b(x)$$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbf{R}$.	Équation homogène associée. Cas particulier où a est une constante.
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	
Principe de superposition.	
Description de l'ensemble des solutions à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	
Méthode de la variation de la constante.	*Seconds membres $P(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$ pour une équation à coefficients constants.*
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	

c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $y'' + ay' + by = f(x)$. où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe définie et continues sur un intervalle.	Équation homogène associée.
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Principe de superposition.	
Description de l'ensemble des solutions à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto A\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbf{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbf{R}^2$.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme.

2 Exercices à savoir refaire

Question de cours 1

1) CCINP
On considère les équations différentielles suivantes :
$$(H)\ :\ 2xy' - 3y = 0 \quad \text{et} \quad (E)\ :\ 2xy' - 3y = \sqrt{x}.$$
   (a) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   (b) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   (c) L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?
2) Trouver l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbf{R}$ telles que
$$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$
3) Résoudre sur $\mathbf{R}_+^*$: $4xy'' + 2y' - y = 0$.
On pourra poser $x = t^2$.
4) Résoudre l'équation différentielle $y' = y \ln y$.
On pourra poser $y(t) = \mathrm{e}^{z(t)}$.
5) Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbf{R}_+$ telles que
$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \qquad \int_0^x (2x - 3t) f(t)\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}.$$

Question de cours 2 : suites réelles.

1) Unicité de la limite d'une suite convergente.
2) Une suite convergente est bornée.
3) Le produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0, tend vers 0
4) Démontrer une opération sur les limites (finies ou infinies) au choix de l'examinateur.

Pas d'exercices sur les suites cette semaine.