Semaine 09 du 27/11/2023

1 Programme officiel

b) Équations différentielles linéaires du premier ordre

Équation différentielle linéaire du premier ordre $$y' + a(x)y = b(x)$$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbf{R}$.	Équation homogène associée. Cas particulier où a est une constante.
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	
Principe de superposition.	
Description de l'ensemble des solutions à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	
Méthode de la variation de la constante.	*Seconds membres $P(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$ pour une équation à coefficients constants.*
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	

c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $y'' + ay' + by = f(x)$. où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe définie et continues sur un intervalle.	Équation homogène associée.
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Principe de superposition.	
Description de l'ensemble des solutions à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto A\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbf{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbf{R}^2$.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme.

2 Exercices à savoir refaire

Question de cours 1

1) Résoudre sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ $y' + \tan(t)\,y = \frac{1}{\cos(t)}$.
2) Résoudre sur $I = \mathbf{R}$, $y' = 3y + (x+1)\,\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{3x}$.
3) Résoudre sur $I = \mathbf{R}$, $y' = 3y + \mathrm{e}^{x}\sin(x)$.
4) Résoudre sur $I = \mathbf{R}$, $y' + 2y = \cos(2t)$.
5) Résoudre sur $I = \mathbf{R}$, $y'' + y' + y = \cos(2t)$.
6) Résoudre sur $I = \mathbf{R}$, $y'' + y = \cos(t)$.

Question de cours 2

1) Résoudre sur $\mathbf{R}$, $ty' + y = 0$.
2) Résoudre sur $\mathbf{R}$, $ty' = y$.
3) CCINP
   On considère les équations différentielles suivantes :
   $$(H)\ :\ 2xy' - 3y = 0 \quad \text{et} \quad (E)\ :\ 2xy' - 3y = \sqrt{x}.$$
   (a) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   (b) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   (c) L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?
4) Trouver l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbf{R}$ telles que
   $$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Question de cours 3
Prouver, au choix de l'examinateur.

1) Unicité de la limite d'une suite convergente.
2) Une suite convergente est bornée.
3) Limite d'une somme de deux suites convergentes.
4) Limite d'un produit de deux suites convergentes.
5) Limite de l'inverse d'une suite convergente de limite non nulle.
6) Si u converge vers $\ell \in \mathbf{R}$ et v diverge vers $+\infty$, alors $u + v$ diverge vers $+\infty$.
7) Si u converge vers $\ell \in \mathbf{R}$ et v diverge vers $+\infty$, alors $\frac{u}{v}$ converge vers 0.
8) Si u converge vers $\ell \in \mathbf{R}_+^*$ et v diverge vers $+\infty$, alors uv diverge vers $+\infty$.

Priorité aux questions de cours et à la maîtrise précise *des quantificateurs pour les suites.*
La semaine prochaine sera dévolue aux mêmes thèmes.