Semaine 10 du 02/12/2024

1 Programme officiel

c) Généralités sur les suites réelles

Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée si, et seulement si $(\lvert u_n\rvert)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée.
Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.	*Les suites définies implicitement seront davantage détaillées dans un chapitre spécifique.*

d) Limite d'une suite réelle

Limite finie ou infinie d'une suite.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notation $u_n \to \ell$, $\lim u_n$.
Suite convergente, divergente.	*On parle de nature de la suite.*
Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
Passage à la limite d'une inégalité large.	
Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.	
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	Utilisation d'une majoration de la forme $\lvert u_n - \ell\rvert \leqslant v_n$ où (v_n) converge vers 0.

e)Suites monotones

Théorème de la limite monotone.	
Théorème des suites adjacentes.	

f) Suites extraites

Suite extraite. Si une suite possède une limite alors toutes ses suites extraites possèdent la même limite.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ.
Théorème de Bolzano-Weierstrass.	Principe de démonstration par dichotomie.

g) Traduction séquentielles de certaines propriétés

Partie dense dans $\mathbf{R}$.	Une partie de $\mathbf{R}$ est dense dans $\mathbf{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.
Caractérisation séquentielle de la densité.	Densité de l'ensemble des décimaux, des rationnels, des irrationnels.
Si X est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de $\mathbf{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$ (resp. $+\infty$).	

Pas encore de suites définies par récurrence ou implicitement une fonction, ni de suites à valeurs complexes.

2 Question de cours

1) Théorème de la limite monotone (on peut ne demander qu'un seul des deux cas : borné ou non).

2) Théorème des suites adjacentes.

3) Montrer que les suites définies par

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \ \text{ et } \ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

convergent vers la même limite.

4) Toute suite non majorée admet une suite extraite qui tend vers $+\infty$.

5) Une suite bornée converge si, et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence dans $\mathbf{R}$.

6) Énoncé et démonstration d'une propriété séquentielle (borne supérieure, partie non majorée, densité de A dans $\mathbf{R}$).

7) Théorème de Bolzano-Weierstrass, cas réel (l'étudiant peut demander à passer sur une autre question de cours).