Semaine 10 du 04/12/2023

1 Programme officiel

c) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée si, et seulement si $(\lvert u_n\rvert)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée.
Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.	*Les suites définies implicitement seront davantage détaillées dans un chapitre spécifique.*
d) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notation $u_n \to \ell$, $\lim u_n$.
Suite convergente, divergente.	*On parle de nature de la suite.*
Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
Passage à la limite d'une inégalité large.	
Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.	
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	Utilisation d'une majoration de la forme $\lvert u_n - \ell\rvert \leqslant v_n$ où (v_n) converge vers 0.
e)Suites monotones	
Théorème de la limite monotone.	*Éviter de lui donner d'autres noms.*
Théorème des suites adjacentes.	
f) Suites extraites	
Suite extraite. Si une suite possède une limite alors toutes ses suites extraites possèdent la même limite.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ.
Théorème de Bolzano-Weierstrass.	Principe de démonstration par dichotomie.
g) Traduction séquentielles de certaines propriétés	
Partie dense dans $\mathbf{R}$.	Une partie de $\mathbf{R}$ est dense dans $\mathbf{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.
Caractérisation séquentielle de la densité.	Densité de l'ensemble des décimaux, des rationnels, des irrationnels.
Si X est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de $\mathbf{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$ (resp. $+\infty$).	
h) Suites complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.
Théorème de Bolzano-Weierstrass.	

Pas encore de suites définies par récurrence ou implicitement une fonction.

2 Exercices à savoir refaire

Poser deux questions de cours à la suite.
La semaine suivante sera consacrée aux exercices.

⚠ Insister sur la **rigueur** de la rédaction.

1ère question :
Prouver une opération sur les limites
(par exemple si $u_n \to \ell \in \mathbf{R}_+^*$ et $v_n \to +\infty$, alors $u_n v_n \to +\infty$, ou si $u_n \to \ell \in \mathbf{R}$, et $\lambda \in \mathbf{R}$ alors $\lambda u_n \to \lambda\ell$... ou toute autre opération « usuelle »). *Toutes n'ont pas été faites en classe.*

2ème question :
Prouver :

- Théorème de la limite monotone (on peut ne demander qu'un seul des deux cas : borné ou non).
- Théorème des suites adjacentes.
- Montrer que si ℓ est valeur d'adhérence de la suite $((-1)^n)$, alors $\ell \in \{-1, 1\}$.
- Théorème de Bolzano-Weierstrass (cas réel).
- Théorème de Bolzano-Weierstrass (cas complexe).
- Densité des décimaux dans $\mathbf{R}$.
- Caractérisation séquentielle de la borne sup/de la densité/de la non majoration d'une partie.

Autres exercices : équations différentielles et primitives exclusivement (équations fonctionnelles, changements de variables, non mise sous forme résolue, ou plus simple...).