

## SEMAINE 11 DU 08/12/2025

## 1 PROGRAMME OFFICIEL

c) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.	Une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée si, et seulement si $( u_n )_{n \in \mathbf{N}}$ est majorée.
d) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notation $u_n \rightarrow \ell$ , $\lim u_n$ .
Suite convergente, divergente.	<i>On parle de nature de la suite.</i>
Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
Passage à la limite d'une inégalité large.	
Si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $\ell > 0$ , alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.	
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$ ), par majoration (limite $-\infty$ ).	Utilisation d'une majoration de la forme $ u_n - \ell  \leq v_n$ où $(v_n)$ converge vers 0.
e) Suites monotones	
Théorème de la limite monotone.	<i>Éviter de lui donner d'autres noms.</i>
Théorème des suites adjacentes.	
f) Suites extraites	
Suite extraite. Si une suite possède une limite alors toutes ses suites extraites possèdent la même limite.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ tendent vers $\ell$ , alors $(u_n)$ tend vers $\ell$ .
Théorème de Bolzano-Weierstrass.	Principe de démonstration par dichotomie.

## g) Traduction séquentielles de certaines propriétés

Partie dense dans $\mathbf{R}$ .	Une partie de $\mathbf{R}$ est dense dans $\mathbf{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.
Caractérisation séquentielle de la densité.	Densité de l'ensemble des décimaux, des rationnels, des irrationnels.
Si $X$ est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de $\mathbf{R}$ , il existe une suite d'éléments de $X$ de limite $\sup X$ (resp. $+\infty$ ).	

**Toujours pas de suites à valeurs complexes, pas de suites récurrentes ou définies implicitement par une fonction.**

## 2 QUESTION DE COURS

- 1) Théorème de la division euclidienne (existence et unicité pour  $a \in \mathbf{Z}$  et  $b \in \mathbf{N}^*$ )
- 2) Caractérisation du pgcd comme plus grand diviseur commun au sens de la divisibilité.
- 3) Lemme de Gauss
- 4) Deux propriétés sur les valuations  $p$ -adiques parmi  $v_p(ab)$ ,  $a|b$ ,  $v_p(a \wedge b)$  et  $v_p(a \vee b)$ .
- 5) Montrer que pour tout sous-groupe  $G$  de  $\mathbf{Z}$ , il existe  $d \in \mathbf{N}$  tel que  $G = d\mathbf{Z}$ .

## 3 EXERCICES

Sur les suites.