Semaine 13 du 05/01/2026

1 Programme officiel

a) Opérations sur les matrices	
Ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbf{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathscr{M}_{n,\,p}(\mathbf{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{n,\,p}(\mathbf{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,\,j}$.
Transposée d'une matrice.	Notation A^{T}.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	

e) Anneau des matrices carrées	
Anneau $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.	Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro, éléments nilpotents.
Matrice identité, matrice scalaire.	Notation I_n.
Matrices symétriques, antisymétriques.	Notations $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$, $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	Application au calcul de puissances.

2 Question de cours

1) Calcul du produit de deux matrices élémentaires.
2) $T_n^+(\mathbf{K})$ est stable par produit, en déduire que $T_n^-(\mathbf{K})$ l'est aussi (triangulaires supérieures et inférieures).
3) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
4) Pour $J = (1)_{(i,\,j)\in[\![1,\,n]\!]^2}$, calculer J^p pour tout $p \in \mathbf{N}$.
5) Avec les notations et résultats du point précédent, calcul de $(J-I)^p$.
6) Décomposition d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et antisymétrique.

3 Exercices

Petits calculs matriciels élémentaires pour vérifier le cours (on reprendra la semaine suivante).
Étude de suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ (sans accroissements finis).
Équivalents de suites, négligeabilité, domination (⚠ on n'a fait aucune suite implicite en classe, il faut donc guider si on choisit un exercice de ce type).