Semaine 14 du 15/01/2024

1 Programme officiel

a) Limite d'une fonction en un point

Étant donné un point a de $\overline{\mathbf{R}}$ appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Si f est définie en a et possède une limite en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.	
Si f possède une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie).	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	
Passage à la limite d'une inégalité large.	
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	
Théorème de la limite monotone.	

b) Continuité en un point

Continuité, prolongement par continuité en un point.	La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.
Continuité à gauche, à droite.	
Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.	
Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	

c) Continuité sur un intervalle

Continuité sur un intervalle.	
Théorème des valeurs intermédiaires.	Principe de démonstration par dichotomie.
Image d'un intervalle par une fonction continue.	
Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone.	
Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	
Image d'un segment par une fonction continue.	
Une fonction continue sur un intervalle, à valeurs réelles et injective, est strictement monotone.	La démonstration n'est pas exigible.
Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.	La démonstration n'est pas exigible.

d) Fonctions complexes

Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité.	Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.

2 Questions de cours

1) Caractérisation séquentielle d'une limite.

2) Montrer que deux fonctions continues sur I qui coïncident sur $\mathscr{D}$ dense dans I sont égales sur I.

3) Trouver les fonctions continues $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que

$$\forall (x,\, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

4) Soit f continue sur $]a,\, b[$ et admettant des limites finies en a et en b.
Montrer que f est bornée sur $]a,\, b[$
Montrer que cela reste vrai pour $a = -\infty$ et $b = +\infty$.

3 Quelques exercices types

Les étudiants doivent avoir le réflexe pour la méthode.

1) Existence de points fixes (ou équations s'y ramenant).

2) Résolution d'équations fonctionnelles. On pourra en poser de trois types :

   (a) continuité + densité :
   exemple : trouver les fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R},\, \mathbf{R})$ telles que

   $$\forall (x,\, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x+y) = f(x)f(y).$$

   (b) suite récurrente + continuité en un point :
   exemple : trouver les fonctions f définies sur $\mathbf{R}$ et continues en 0 telles que

   $$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = f(\operatorname{Arctan}\,(x)).$$

   (c) dérivabilité :
   exemple : trouver les fonctions $f \in \mathscr{D}^1(\mathbf{R},\, \mathbf{R})$ telles que

   $$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

   On n'a pas encore traité le cas de la dérivabilité en un point + suite récurrente.