Semaine 14 du 12/01/2026

1 Programme officiel

a) Opérations sur les matrices

Ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbf{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathscr{M}_{n,\,p}(\mathbf{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{n,\,p}(\mathbf{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,\,j}$.
Transposée d'une matrice.	Notation A^{T}.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	

b) Opérations élémentaires

Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en terme d'opérations matricielles.	

c) Systèmes linéaires

Écriture matricielle $AX = B$ d'un système matriciel. Système homogène associé.	
Système compatible.	Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A.
Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $Y = X_0 + Y$ où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.	On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en terme d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.

e) Anneau des matrices carrées

Anneau $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.	Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro, éléments nilpotents.
Matrice identité, matrice scalaire.	Notation I_n.
Matrices symétriques, antisymétriques.	Notations $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$, $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	Application au calcul de puissances.
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.
Inverse d'une transposée.	
Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.	
Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution d'un système $AX = Y$.	
Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.	Cas particulier des matrices diagonales.

2 Question de cours

1) Calcul du produit de deux matrices élémentaires $E_{ij} \times E_{k\ell}$.
2) $T_n^+(\mathbf{K})$ est stable par produit, en déduire que $T_n^-(\mathbf{K})$ l'est aussi.
3) Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, puis montrer qu'il n'existe pas de matrices A, B de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.
4) Pour $J = (1)_{(i,\,j)\in[\![1,\,n]\!]^2}$, calculer J^p pour tout $p \in \mathbf{N}$.
5) Avec les notations et résultats du point précédent, calcul de $(J - I)^p$.
6) Décomposition d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et antisymétrique.
7) Si $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.
   Si A, B non nulles, $AB = 0 \Rightarrow (A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $B \notin \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}))$.
8) Puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec le binôme de Newton ou par récurrence.

3 Exercices

Principalement sur les matrices.
On peut (éventuellement) donner ensuite une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ (sans accroissements finis).