# Semaine 15 du 22/01/2023

## 1 Programme officiel

### a) Nombre dérivé, fonction dérivée

| | |
|---|---|
| Dérivabilité en un point, nombre dérivé.<br>La dérivabilité entraîne la continuité.<br>Dérivabilité à gauche, à droite. | Définition par le taux d'accroissement.<br>Caractérisation : une fonction $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en $a$. Dans ce cas<br>$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$, où $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{}$<br>Interprétation géométrique : tangente.<br>Interprétation cinématique : vitesse instantanée. |
| Dérivabilité et dérivée sur un intervalle. | |
| Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque. | Tangente au graphe d'une fonction réciproque. |

### b) Extremum local et point critique

| | |
|---|---|
| Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur. | Un point critique est un zéro de la dérivée. |

### c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

| | |
|---|---|
| Théorème de Rolle. | |
| Égalité des accroissements finis. | Interprétations géométrique et cinématique. |
| Inégalité des accroissements finis : si $f$ est dérivable et si $\lvert f'\rvert$ est majorée par $K$, alors $f$ est $K$-lipschitzienne. | La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion.<br>Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. |
| Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle. | |
| Théorème de la limite de la dérivée : si $f$ est continue sur $I$, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbf{R}$, alors $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = \ell$. | La fonction $f'$ est alors continue en $a$. |
| Extension au cas où $\ell = \pm\infty$. | |

### d) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

| | |
|---|---|
| Pour $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe $\mathscr{C}^k$. | |
| Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque. | Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles. |

### e) Fonctions complexes

| | |
|---|---|
| Brève extension des définitions et résultats précédents. | Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire. |
| Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe $\mathscr{C}^1$. | On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section « Intégration ». |

## 2 Questions de cours

1) Égalité des accroissements finis.

2) **CCINP 3**

   (a) On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel $k$, la dérivée d'ordre $k$ des fonctions $g$ et $h$ sur leurs ensembles de définitions respectifs.

   (b) On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel $n$ et pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

   (c) Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

3) **CCINP 4**

   (a) Énoncer le théorème des accroissements finis.

   (b) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in ]a, b[$.
   On suppose que $f$ est continue sur $[a, b]$ et que $f$ est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.
   Démontrer que, si $f'$ admet une limite finie en $x_0$, alors $f$ est dérivable en $x_0$ et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

   (c) Prouver que l'implication : ( $f$ est dérivable en $x_0$) $\Longrightarrow$ ($f'$ admet une limite finie en $x_0$) est fausse.

   **Indication**: on pourra considérer la fonction $g$ définie par: $g(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.